



**BUDAPESTI MŰSZAKI és GAZDASÁGTUDOMÁNYI  
EGYETEM**  
Közlekedésmérnöki Kar

# **J Á R M Ű R E N D S Z E R - D I A G N O S Z T I K A**

**2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a  
rendszerdinamika felhasználási lehetőségei**

**Oktatási segédlet**

(II. rész, 2.5 fejezet)

**Készítette::**

**Dr. Zobory István**  
egyetemi tanár

**Dr. Benedek Teofil**  
egyetemi docens

**Dr. Győri József**  
egyetemi docens

**B U D A P E S T**  
**2 0 0 7**

### **Az eddig készült oktatási segédletek:**

1. A járműrendszer-diagnosztika elméleti alapjai
- 2./a A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei (I. rész)
- 2./b A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei (II. rész)
3. A metrológia a járműrendszer-diagnosztikában. Méréstechnika
4. A metrológia a járműrendszer-diagnosztikában. Méréselmélet
5. A futóműdiagnosztikai mérések fejlesztési lehetőségei, a Vasúti Járművek Tanszéken fejlesztés alatt álló futóműdiagnosztikai próbapad
6. A járműüzem szimulációjának néhány alkalmazási lehetősége a futóműdiagnosztikában (készítés alatt)
7. A DB (Német Vasutak) ICE motorvonatainak üzemében alkalmazott karbantartási-javítási rendszer
8. Számpéldák a Járműrendszer-diagnosztika tárgy Oktatási Segédleteihez

## **2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei**

(II. rész)

### **Tartalom:**

- 2.5 A járműüzem komplex szimulációjának alkalmazása a járműrendszer-diagnosztikában
  - 2.5.1 A járműüzem komplex szimulációjának alkalmazási területei
  - 2.5.2 A jármű- és pályaadatok felhasználása a járműüzem komplex szimulációjában
- 2.6 A járműdinamikai modell
  - 2.6.1 A járműdinamikai modell felépítése
  - 2.6.2 A dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldása során felmerülő hibák
  - 2.6.3 A dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldási lehetőségei
    - 2.6.3.1 Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletek analitikus megoldása
    - 2.6.3.2 Közönséges, másodrendű, inhomogén differenciálegyenletek numerikus megoldása
- 2.7 A járműüzem szimulációjának néhány típusfeladata
  - 2.7.1 Vasúti jármű (vagy vonat) dinamikai modelljének felépítése megadott pályaszakaszon való végigfutása szimulálására
    - 2.7.1.1 A mozgásegyenletek megoldása numerikus módszerrel
    - 2.7.1.2 A mozgásegyenletek megoldása zárt alakban
  - 2.7.2 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott függőleges pályahibákon való végigfutásának szimulálására (lineáris változat)
  - 2.7.3 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott függőleges pályahibákon való végigfutásának szimulálására (nemlineáris változat)
  - 2.7.4 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott keresztirányú pályahibákon való végigfutásának szimulálására (lineáris változat)
  - 2.7.5 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott keresztirányú pályahibákon való végigfutásának szimulálására (nemlineáris változat)
- 2.8 A számított eredmények megjelenési formája és további felhasználási lehetőségei

## Felhasznált irodalom:

1. Dr. Zobori I.: A pálya-jármű rendszer diagnosztikája a járműgépész szemével. V. Nemzetközi „Pálya-Jármű Rendszer”. KTE Konferencia, Velem, 1993.
2. Dr. Benedek T.: Futóműdiagnosztika kialakítása dinamikai szimulációval létrehozott adatbank felhasználásával. VIII. Országos Vasúti Futástechnikai Konferencia. Pécs, 1997. május.
3. Görbicz S. – Sasi I. – Vadászy P.: Vasúti járművek minősítő mérései. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.
4. Thamm - Ludwig - Huszár - Szántó: A szilárdságtan kísérleti módszerei. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968.
5. Hottinger Baldwin Messtechnik. Product Catalogue 1999. Magyarországi képviselő: 2101. Gödöllő, Remsey krt. 9. Pf: 81.
6. Dr. Sostarics Gy., Dr. Balogh V.: Vasúti járművek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
7. Tfirst Gy.: A vasúti járművek futásminőségének időszerű kérdései. Járművek, Mezőgazdasági Gépek. 30. évfolyam 1983. 10. szám.
8. Dr. Ambrózy András – Jávora András: Mérésadatok kiértékelése. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.
9. Gabor C. Temes – Sanjit K. Mitra: Modern Filter Design and Theory. John Wiley, New York, 1973.
10. Dr. Horváth Károly: Mérnöki Fizika. Egyetemi jegyzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1989.
11. Korn, G.A., Korn, T.M.: Matematikai Kézikönyv Műszakiaknak. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1975.
12. RM/FORTRAN. Installation Supplement. Version 2 (DOS). 1986.
13. Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Számítástechnikai Alkalmazási Központ. Tudományos szubrutin csomag. Tájékoztató füzetek, 24. szám.
14. Obádovics J. Gyula: Matematika. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1974.

## 2. A járműrendszer-diagnosztika mérési gyakorlata és a rendszerdinamika felhasználási lehetőségei

### 2.5 A járműüzem komplex szimulációjának alkalmazása a járműrendszer-diagnosztikában

Amint azt az előző fejezetekben kifejtettük, a vasúti jármű üzemét úgy szimulálhatjuk, hogy a rendszerdinamika segítségével határozzuk meg a jármű üzemének (mozgásának) keregett jellemzőit. A rendszerdinamika alkalmazása azt jelenti, hogy a járművet és a pályát egyetlen összefüggő rendszernek tekintve, felépítjük a jármű és a pálya dinamikai modelljét, majd megoldjuk a modellhez tartozó mozgásegyenleteket (differenciálegyenleteket). A megoldásul kapott mozgásfüggvények írják le a vizsgált járművek mozgását az idő függvényében. Ez a művelet sor alkotja a járműüzem komplex szimulációját. A szimulációt legtöbbször a vasúti járművek tervezése, a járművek üzemének megtervezése, illetve korszerűsítése, valamint a diagnosztikai feladatok megoldása terén alkalmazhatjuk.

#### 2.5.1 A járműüzem komplex szimulációjának alkalmazási területei

**a/ A vasúti járművek tervezése.** A vasúti járműveket úgy kell megtervezni, hogy bizonyos előírt üzemkészségi feltételeknek (kritériumoknak) eleget tegyenek, pl. hogy a kisiklással szembeni biztonságuk, a járművek futásának minősége, stb. megfelelőek legyenek. Ezeket a kritériumokat a 2.4.4 pontban az ú. n. összetett kritériumok közé soroltuk, mert ezek általában olyanok, hogy belőlük a vasúti járművek tervezése során a teljesítendő kritériumokból kiindulva nem lehet közvetlen számítással meghatározni a járművek adatait, hanem csak próbálkozással, a korábbi, már elkészült járművek adatai alapján becsült értékek felvételével lehetett eddig megtervezni a járművet. Most viszont ezekkel a becsült adatokkal végrehajthatjuk a jármű üzemének szimulációját, vagyis meghatározhatjuk a járműnek a pályán való végigfutását leíró összes időfüggvényt, majd az eredményül kapott időfüggvények feldolgozásával kiválaszthatjuk a tervezés szempontjából optimális számértéket a becsléssel felvett adatok közül, hogy az előírt üzemkészségi kritériumok (futásminőség, stb.) teljesítve legyenek. Meg kell említeni, hogy néhány vezető vasúti járműtervező-gyártó cégnél már egy-két évtizeddel ezelőtt használtak – többek között – olyan szoftvert, amellyel a tervezés közben meg lehetett határozni pl. a vasúti jármű kritikus sebességét a tervezés adott pillanatában érvényes járműadatokból. Így többféle adatváltozatot is össze tudtak hasonlítani.

**b/ A járművek üzemének megtervezése, illetve korszerűsítése.** A vasúti járművek üzemének bizonyos folyamatait (pl. tehervonatok rendezése, átállítása, áruk átrakodása, stb.) csak úgy lehet elfogadhatóan gazdaságos módon végrehajtani, ha ki tudjuk választani a néhány kínáló változat közül a viszonylag leggazdaságosabb változatot. Ehhez az szükséges, hogy az összes végrehajtható üzemváltozatot számítással szimuláljuk, így előállíthatjuk a járművek mozgásának minden szükséges időfüggvényét. Ezek birtokában készíthetünk gazdaságossági értékelést és választhatjuk ki az optimális járműüzem-változatot.

**c/ A járműrendszerdiagnosztikai feladatok megoldása.** A járműrendszerdiagnosztikai feladatok abból állnak, hogy meg kell állapítanunk, hogy a járművek üzemkész-e vagy sem. Ehhez az üzemkészségi kritériumok teljesítését kell időről-időre ellenőrizni. De még a méréssel ellenőrizhető egyszerűbb kritériumoknak az ellenőrzése is sokszor igen nehézkes, idő- és költségigényes a szükséges szétszerelési munkák miatt. Azok a mérések, amelyek szétszerelést igényelnek (többnyire javítóműhelyben), általában az alkatrészek kopásának mértékét állapítják meg (pl. járműkerekek futófelülete), vagy hegesztett vázszerkezetek vetemedésének mértékét határozzák meg (pl. kerékpárok vezetési szöghibái), illetve bizonyos rugótípusok (pl.

gumirugók), vagy lengéscsillapítók jelleggörbéinek az öregedés során bekövetkezett kedvezőtlen változását adják meg. Ezeknek az alkatrészeknek, illetve járműelemeknek az üzem folyamán bekövetkezett változását azonban számítással, a járműüzem megfelelő szimulációjával is meg lehet határozni, de főleg a változási tendencia mértékét kaphatjuk meg ilyen módon. Megfelelő számítási módszer birtokában pl. a járműkerekek futófelületének kopása is meghatározható, ahogyan a profilalak az időben változik. A kerékprofil időbeli kopásának mértékét megadó adatsornak a birtokában olyan további, összetettebb kritériumoknak az időbeli változása is meghatározható, amelyeket az aktuális kerékprofillal futó járművek eredményeznek, pl. a keresztirányú futásjósági (futáskényelmi) szám változása az időben.

### 2.5.2 A jármű- és pályaadatok felhasználása a vasúti járműüzem komplex szimulációjában

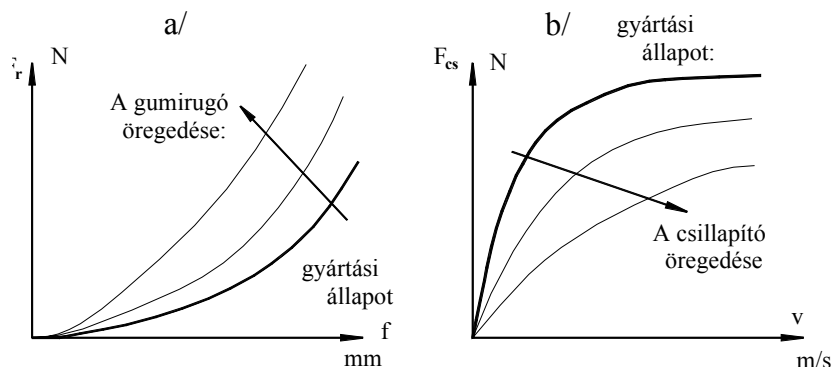
A vasúti járművek komplex szimulációjához felhasznált adatok többnyire olyanok, hogy a járműmenet egy konkrét szimulációja során gyakorlatilag nem változnak. Ilyenek a geometriai adatok, a jármű saját tömege, a hajtás jellemzői (sebesség-vonóerő jelleggörbe sereg, stb.), a rugók, lengéscsillapítók jelleggörbéi, stb. Ezeket az adatokat a szimuláció során nem kell változtatni.

Az adatok között viszont vannak olyanok, hogy a hosszabb járműüzem során már változnak, mint pl. a gumirugók rugómerevségének növekedése a gumianyag öregedése miatt, a lengéscsillapítók szelepeinek elhasználódása, a vonóerő-sebesség jelleggörbe-sereg vonóerőértékeinek lecsökkenése a kopások, elhasználódások miatt, stb. Ezeket a változásokat az időről-időre végrehajtott szimulációkban vehetjük figyelembe.

Az alábbiakban néhány ilyen adatfajta felhasználási módját részletesebben is ismertetjük.

**a/ Rugók, csillapítók, stb. jelleggörbéje.** Ha egy rugóerőnek, vagy csillapítóerőnek a képlete nem lineáris függvény, hanem valamilyen magasabbrendű algebrai függvény, vagy csak egyszerűen abszcissa-ordináta párok sorával van megadva (pl. mérési eredmény), akkor fontos, hogy ez a függvény a járműüzem szimulációs programja számára megfelelő módon megadható egyen. Igaz, hogy így a legtöbb esetben a mozgásegyenlet(rendszer) nem lesz lineáris, de megmarad közönséges differenciálegyenlet(rendszer)nek, ami numerikus módszerrel megoldható. Ez nem külön hátrány, mert a gyakorlatban előforduló méretű differenciálegyenlet-rendszereket amúgy is csak numerikus módszerrel lehet megoldani.

Így megvan annak is a lehetősége, hogy ha egy rugónak, csillapítónak, stb. a jelleggörbéje az idő folyamán változik, akár a természetes elöregedés következtében, mint pl. egy gumirugó anyagának felkeményedése (2.18 ábra, a/ rész), akár törés, vagy valami hasonló üzemzavar következtében, pl. egy duplex csavarrugó belső rugórészének törése, akkor a megváltozott jelleggörbének a futásra gyakorolt hatását szimulálni lehet.



2.18 ábra

A lengéscsillapító szelepeinek zárása is romlik az idő függvényében, aminek következtében a csillapító erő görbéje egyre alacsonyabban helyezkedik el (2.18 ábra, b/ rész).

A jelleggörbék ilyen változását úgy lehet figyelembe venni, hogy a mozgásegyenletrendszerben a rugóerőt nem az  $s$  rugómerevséggel és a rugó  $f$  összenyomódásával vesszük figyelembe ( $F_{\text{rugó}}=s \cdot f$ ), valamint a csillapító erőt sem a  $d$  csillapítási együtthatóval és a lengéscsillapító bekötési pontjai közötti  $v_{\text{rel}}$  relatív sebességgel vesszük számításba ( $F_{\text{cs}}=d \cdot v_{\text{rel}}$ ), hanem a jelleggörbék az  $f$  összenyomódás, illetve  $v_{\text{rel}}$  relatív sebesség megfelelő algebrai függvényével (esetleg a görbe elegendő számú abszcissa-ordináta értékpárjával) vesszük tekintetbe:

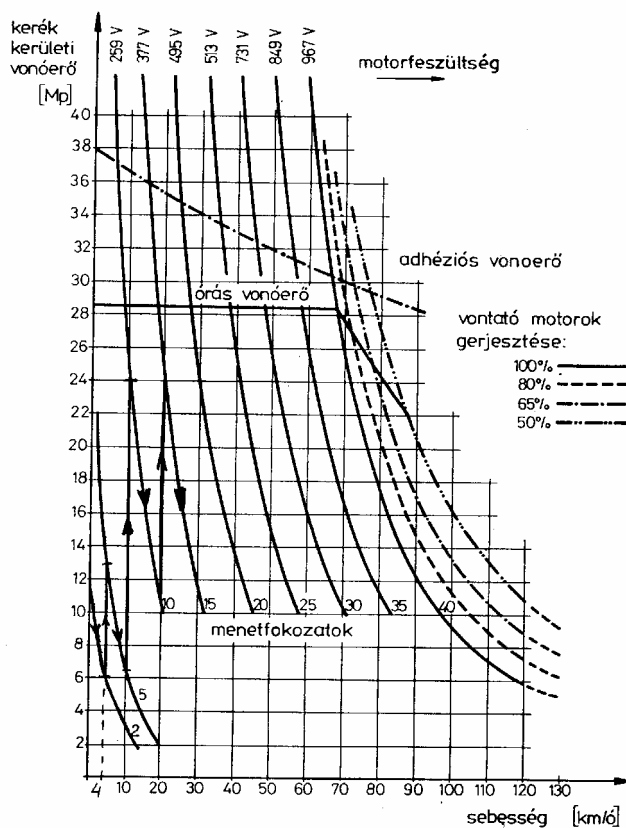
$$F_r = f_r(f) \quad \text{és} \quad F_{cs} = f_{cs}(v_{rel})$$

ahol az  $f_r$  és  $f_{cs}$  függvények akár olyan szerkezetű algebrai függvények, amelyet megfelelő görbeillesztési módszerrel kaphatunk meg, akár abszcissa-ordináta párok halmazát használó függvények. E módszer hátránya, hogy elvesz a mozgásegyenlet lineáris jellege, sem a  $D$  csillapítási, sem az  $S$  merevségi mátrix nem lesz értelmezhető (így a dinamikai modellnek nem lesznek meghatározott értékű sajátkörfrekvenciái sem), előnye viszont, hogy a mozgásegyenletek megmaradnak **közönséges differenciálegyenleteknek**, így a programkönyvtárakban hozzáférhető numerikus megoldási módszerek mind használhatók maradnak. A mozgásegyenleteket megoldó programot úgy lehet felépíteni, hogy a rugóerőt, illetve csillapító erőt egy-egy függvény, vagy szubrutin határozza meg, amely szubprogramokban az  $f_r$ , illetve  $f_{cs}$  függvény adatai a szubprogramok beépített, vagy beolvasott értékei lesznek. Így a jelleggörbék változását úgy vehetjük figyelembe, hogy a jármű üzemét más és más beolvasott jelleggörbékkel újra szimuláljuk. Fontos tudni, hogy egy-egy ilyen aktuális jelleggörbe egy meghatározott pályaszámú jármű meghatározott rugójához, illetve csillapítójához is tartozhat.

**b/ A vontatójárművek vonóerő-sebesség jelleggörbe-serege.** A vontatójárművek vezérlése általában úgy van felépítve, hogy a vontatási teljesítmény  $P_{\text{max}}$  maximális értékén kívül számos (akár 15 – 20, vagy több)  $P_{\text{rész}}$  részteljesítmény-érték is megvalósítható  $0$  és  $P_{\text{max}}$  között. Minden egyes  $P_{\text{rész}}$  részteljesítményhez külön vonóerő-sebesség jelleggörbe tartozik. A 2.19 ábra egy villamosmozdony vonóerő-sebesség jelleggörbe-seregét mutatja be. (Az ábrázolás egyszerűsítése érdekében a teljes gerjesztéshez tartozó 40 teljesítményfokozat közül csak kilenc görbe van az ábrán feltüntetve.) A jelleggörbe-sereg ismeretében a vonat felgyorsulásának teljes folyamatát szimulálhatjuk.

A felgyorsítás során az egyes részteljesítmény-értékeket bizonyos sebesség-tartományban kapcsolják be, majd valamelyik nagyobb részteljesítményre kapcsolnak át. Automatikus vezérlés esetén a teljesítmény-fokozatok kapcsolási sorrendje és az átkapcsolási műveletek végrehajtása meg van szabva, ennek híján a járművezető szubjektív megítélésétől függ, hogy milyen járműsebességen melyik nagyobb teljesítményfokozatba kapcsol át, tehát hogy milyen a vezetési stílusa. A 2.19 ábrán feltüntetettünk egy lehetséges teljesítményfokozat-átkapcsolási sorrendet, tételezzük fel, hogy a járművezető ennek megfelelően gyorsítja fel a vonatot. A járművezető a „2” sebességfokozattal indul, és kb. 4 km/h sebességnél átkapcsol az „5” fokozatba. Ezzel kb. 10 km/h sebességig gyorsul, itt átkapcsol a „10” fokozatba, majd 20 km/h-nál a „15” fokozatba, és így tovább. Az ábrából látható, hogy elvileg tetszőleges teljesítményfokozat-kombinációkkal lehet a vonatot felgyorsítani. Mivel a vonóerő a mozgásegyenlet jobboldalán a „gerjesztések” között szerepel, itt lehet megfelelő szubprogramot behívni, amely beépített, vagy beolvasott formában tárolja az összes vonóerő-görbének vagy a görbére illesztett függvény algebrai képletét, vagy egyszerűen csak a görbe megfelelő mennyiségű  $v - F_v$  értékpárját. Megadva bemenő adatként a fokozatátkapcsolásokhoz tartozó sebességértékeket, valamint az alkalmazandó teljesítményfokozat sorszámát, a program ennek megfelelően fogja szí-

mulálni a vonat felgyorsulását. Így akár az egyes járművezetők egyéni vezetési stílusa is modellezhető. A dinamikai modell felépítéséről további részleteket a 2.6 fejezetben találhatunk.



2.19 ábra

A fékezőerő-sebesség görbesereg a vonóerő-sebesség görbékhez hasonlóan vehető figyelembe.

**c/ A járművek alapellenállás-erő-adatainak figyelembe vétele.** A menetellenállás-erő képletét a számításokban a következő alakban alkalmazzák:

$$F_e = G^{kN} \cdot w(v)^{N/kN} = F_{e,0} + F_{e,p} = G^{kN} \cdot (w_0(v) + w_p(s))^{N/kN}$$

ahol  $G^{kN}$  a jármű súlyereje  $kN$ -ban,  $w(v)$  a fajlagos ellenállás-erő,  $w_0(v)$  a fajlagos alapellenállás,  $w_p(s)$  pedig a fajlagos pályaellenállás. A  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállás képlete a mérési eredményekre illesztett másodfokú parabola:

$$F_{e,0} = G^{kN} \cdot w_0(v)^{N/kN} = G^{kN} \cdot (a + b|v| + c \cdot v^2)^{N/kN}$$

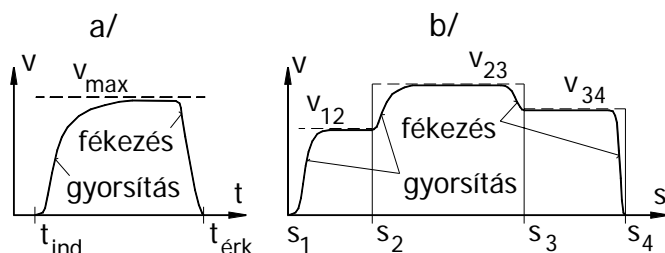
A  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállás képletének számadatai általában járműtípushoz tartoznak, így pl. a MÁV által négytengelyű személykocsikra használt képlet számértékei a következők:

$$w_0(v) = a + b|v| + c \cdot v^2 = 1.8 + 0.025 \cdot \left(\frac{v}{10}\right)^2, \text{ mivel } b = 0 \text{ ebben a képletben.}$$

Ha a szimulációs modell mozgásegyenletrendszerét úgy építjük fel, hogy az alapellenállás-erő képletét egy külön szubprogram tartalmazza, és az beolvashat minden szükséges adatot, akkor tetszésszerűen jármű alapellenálláserejét is figyelembe tudjuk venni, mégha a képlet adatai egy alkalmi ellenőrző mérés eredményein is alapulnak.



**f/ A menetrend adatainak figyelembe vétele.** A menetrend általában csak a  $t_{\text{ind}}$  indulási és  $t_{\text{érk}}$  érkezési időpontot, valamint az engedélyezett  $v_{\text{max}}$  maximális sebességet adja meg (2.20 ábra, a/ részlet), emellett az engedélyezett sebesség bizonyos útszakaszok esetében különböző is lehet (2.20 ábra, b/ részlet).



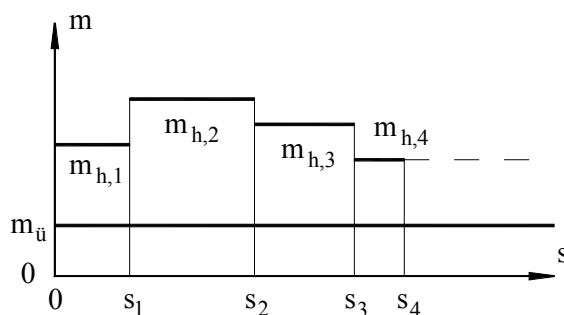
2.20 ábra

A valóságos menetábra  $v(t)$ , illetve  $v(s)$  függvényeit főleg a vontatójármű gépezete, valamint a járművezető vezetési stílusa szabja meg, a fékezések diagramjait hasonlóan a fékberendezés és a járművezető fékezési stílusa határozza meg. A vontatójármű gépezetének, a fékberendezésnek, valamint járművezető vezetési, ill. fékezési stílusának tulajdonságait a vonóerő-sebeség, ill. fékezőerő-sebesség jelleggörbesereg megfelelő alkalmazásával vehetjük figyelembe, pl. az egyes vonóerő-fokozatok váltásához tartozó sebességhatárok felvétele, stb. (Ennek részleteit a 2.6 fejezetben láthatjuk.). Ezenkívül szimulálhatjuk a sebességi előírások megváltoztatásának hatását is, pl. ha felemelik a  $v_{\text{max}}$  sebességkorlátot, megvizsgálhatjuk, hogy a vizsgált vontatójármű fel tud-e gyorsulni erre a sebességre ?

**g/ A járművek geometriai és egyéb adatainak az előírttól való eltérésének figyelembe vétele.** Ide tartoznak pl. a hegesztéssel elkészített alváz megengedett (és valóságos) tűrései. Ilyen lehet a csapágyvezetés hibája által okozott kerékpár-ferdeség, az egy kerékpárhoz tartozó kerekek gördülőkör-sugarai közötti eltérés, a kerékprofil kopott alakja, stb. Ezek számításba vételének részleteivel a 6. Oktatási Segédletben foglalkozunk.

Ezen felsorolt adatok olyan jellegűek voltak, amelyek a jármű menetének szimulációja során gyakorlatilag nem változtak. Egy másik adatcsoportba olyan adatok tartoznak, amelyek a megtett út során számottevően megváltozhatnak. Ide tartozik – többek között – a jármű hasznos terhelése, illetve a szállított utasok tömege, valamint a pályaellenállási erő összetevői: a pálya emelkedéséből és a pályáiból eredő pályaellenállási erő.

**a/ A jármű tömegének változása.** A járművek össztömegében a hasznos tömegrész változását végig követhetjük a járműnek a pályaszakaszon való mozgása során. (Dízelmozdoyok gázolajtartályában a a gázolaj tömegének változása általában elhanyagolható a mozdony össztömegéhez képest.) A járművek hasznos tömegének változása általában a megtett út függvénye, ahogy bizonyos állomásokon a szállított áru egy részét be-, vagy kirakják, vagy ahogy az utasok egy része leszáll, illetve felszáll. Ezért a járműtömeg függvénye az alábbi alakú (2.21 ábra):



2.21 ábra

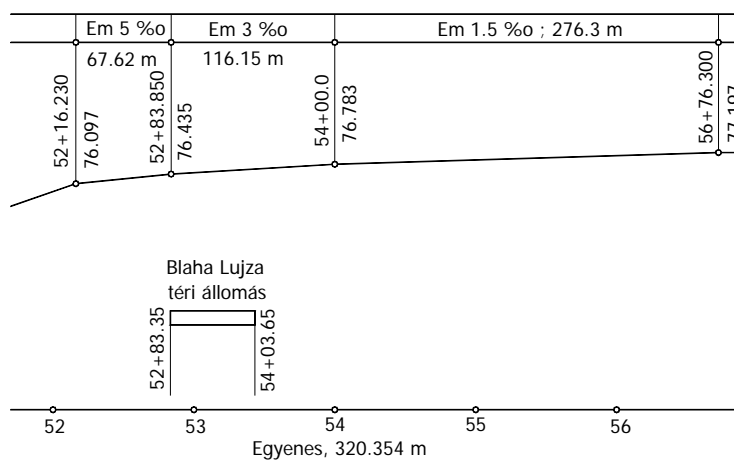
$$\text{Tehát a járművek (vonat) össztömege: } m = m(s) = m_{\ddot{u}} + \begin{cases} m_{h,1}, & \text{ha } 0 \leq s \leq s_1 \\ m_{h,2}, & \text{ha } s_1 \leq s \leq s_2 \\ m_{h,3}, & \text{ha } s_2 \leq s \leq s_3 \\ \bullet \\ \bullet \\ \bullet \end{cases}$$

vagy rövidebben:  $m = m_{\ddot{u}} + m_{h,j}$ , ha  $s_{j-1} \leq s \leq s_j$  és  $j = 1, \dots, N_m$

Ezt a tömegfüggvényt úgy vehetjük figyelembe a mozgásegyenlet integrálása során, hogy  $\Delta t$  időlépésenkint meghatározva a  $t_i$  aktuális időponthoz tartozó  $\mathbf{a}(t_i)$ ,  $\mathbf{v}(t_i)$  és  $\mathbf{s}(t_i)$  értékeket, folyamatosan ellenőrizzük, hogy a megtett út aktuális  $\mathbf{s}(t_i)$  értéke a tömegfüggvény melyik  $[s_{i-1}, s_i]$  út-tartományba esik, és ennek megfelelő  $m = m_{\ddot{u}} + m_{h,j}$  tömegértéket helyettesítünk be az  $\mathbf{m}$  tömeg helyébe.

Ezzel az eszközzel vizsgálni lehet pl. az utasforgalom változását munkanapokon, illetve munkaszüneti napokon, továbbá különböző időszakos utasterheléási csúcsok (pl. rendezvények) hatását a járműforgalomra.

**e/ A vasúti pálya emelkedési-, valamint pályaivsugar-adatainak figyelembe vétele.** Az emelkedések – lejtők, valamint az egyenes – íves pályaszakaszok ívsugarai a pályahossz függvényében az úgynevezett „**hosszszelvény**”-en található meg, amelyet a vasút minden használt pályaszakaszára elkészítenek. A 2.22 ábra a budapesti Metro kelet-nyugati vonalán a Blaha-Lujza téri megálló közvetlen környezetének hosszszelvényét mutatja be.



2.22 ábra

A hosszszelvény bemutatja a pálya egyenes és íves szakaszainak hosszúságát (alulról az első sor), az emelkedők (lejtők) hosszúságát (legfelső sor), valamint az egyes ú. n. műtárgyak (pl. a Blaha-Lujza téri állomás peronja) elhelyezkedését. Ennek figyelembe vételével a járműüzem szimulációját egy megadott valóságos pályára végezhetjük el, számításba véve az egymást követő emelkedéseket és íveket.

Az emelkedőket és pályaiveket a pályaellenállás számításba vételében használjuk fel bemenő adatként. Amint a d/ pontban is említettük, a pályaellenállás egyik összetevője és a következő módon számíthatjuk ki:

$$F_{e,p} = F_{p,em} + F_{p,R} = G \cdot w_{em}(e) + G \cdot w_R(R)$$

ahol a pályaellenállás  $F_{p,em}$  emelkedési összetevőjének képletében a  $w_{em}$  fajlagos emelkedési ellenállás egyenlő az emelkedő előjeles értékével:

$$w_{em}^{N/kN}(e) = e^{0/00} \text{ [N/kN]}$$

míg a pályaellenállás  $F_{p,R}$  pályaiív-összetevőjének képletében a  $w_R$  fajlagos ellenállás a mérési eredményekre illesztett alkalmas képlet, a MÁV által használt összefüggés a következő:

$$w_R(R)^{N/kN} = \frac{520}{R^m - 55} \text{ [N/kN]}$$

A hosszszelvény adatainak felhasználási módját részletesen a 2.6 fejezetben találhatjuk meg.

## 2.6 A járműdinamikai modell

Ebben a fejezetben a járműüzem szimulációjához használt dinamikai modellek általános jellemzőit vizsgáljuk. Mindenekelőtt a modell felépítésének általános szabályait vesszük sorra. Ezt követően a dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldását tárgyaljuk, mindenekelőtt a megoldás során felmerülő hibákat vesszük sorra, végül a mozgásegyenletek megoldási lehetőségeit mutatjuk be.

### 2.6.1 A járműdinamikai modell felépítése

A járműdinamikai modell általában tömegekből, valamint a tömegeket összekapcsoló rugalmas és disszipatív elemekből (pl. rugókból és lengéscsillapítókból) áll. A tömegek pontszerű, vagy véges méretű tömegelemek lehetnek, attól függően, hogy a tömegelemnek csupán egy, vagy több koordinátatengely-irányú elmozdulását modellezzük, vagy egy, vagy több koordinátatengely-körüli szögelfordulását kell szimulálni. Az első esetre példa az a modell, amelyet egy vonatnak (járműnek) egy megadott pályaszakaszon való végighaladásának szimulációjához készül, és kizárólag a pályán való haladást (tehát **egyetlen** koordináta-irányú mozgást) modellezi. Ilyen modell van részletesen tárgyalva a 2.6.2 fejezetben.

A második esetre példa a kocsiszekrény támolygó, kigyózó és bólintó szögelfordulását is modellező tömegelem, amely rendszerint homogén tömegeloszlású téglatest. (Forgóvázak járműveknél természetesen az egyes forgóvázakat külön-külön tömegelem képviseli.) Ilyen modellek vannak részletesen bemutatva a 2.6.3 – 2.6.6 fejezetekben.

A dinamikai modellben a tömegelemeket összekapcsoló rugalmas és disszipatív elemek nem tartoznak mindig valóságos rugókhöz, vagy lengéscsillapítókhöz. Két tömeget összekötő kapcsolatot akkor is megadott rugómerevségű rugalmas elemmel kell modellezni, ha az nem a mindennapi értelemben vett rugó, hanem egy összekötő elem. Pl. egy kerékpár keresztirányú szitáló és függőleges tengely körüli kigyózó mozgásának leírásához a csapágyvezetés hossz- és keresztirányú rugómerevségére szükség van, még ha a csapágyvezetés egy viszonylag merev felépítésű csapágyvillával van is megoldva – legfeljebb a modellben megadott rugómerevség viszonylag nagy számérték (vagy nagy ordinátájú rugókarakterisztika) lesz. (Egy villás csapágyvezetés erő-deformáció jelleggörbéjében a csapágytok és a villa közötti beépítési hézagot is figyelembe kell venni!). Egy másik tipikus eset a különféle ingás felfüggesztések modellezése. A forgóváz-kereszthimba ingás felfüggesztése, vagy a lemezes hordrugók ingás felfüggesztése esetében a himbára, illetve a kocsiszekrényre ható visszatérítő erő kis kitérések esetén jó közelítéssel arányos a kitéréssel, tehát helyettesíteni lehet egy állandó rugómerevségű rugóval, ha fontos, hogy a mozgásegyenlet lineáris maradjon. De megadható az ingás felfüggesztés teljes visszatérítő erő – kitérés jelleggörbéje is, ha a mozgásegyenlet közönséges differenciálegyenlet is lehet.

A tömegek közötti disszipatív kapcsolatokban sok esetben az összekötő elem anyagcsillapítása vehető csak számításba. Pl. egy gumirugó mellé nem szoktak külön lengéscsillapítót beépíteni, a dinamikai modellben a gumianyag csillapítási adataiból határozhatunk meg megfelelő helyettesítő csillapítási együtthatót.

A következőkben vázlatosan összefoglaljuk a dinamikai modell felépítésének egyes lépéseit, a bemutatott típusfeladatokban ezek a lépések részletesebben is láthatók lesznek.

### 1. lépés: a modellezendő jármű (vagy vonat) meghatározása

Mindenekelőtt rögzíteni kell, hogy milyen típusú járművet (vagy szerelvényt) kell modellezni. Meg kell határozni, hogy a típusadatokkal, vagy a modellezendő jármű(vek) mért adataival kell-e végrehajtani a szimulációt. Ha bizonyos adatok nem állnak rendelkezésre (pl. a tehetetlenségi nyomatékok számértékei igen ritkán ismertek), akkor vagy bizonyos egyszerűsítő feltételezésekkel számítani kell ezeket (pl. kocsiszekrény tehetetlenségi nyomatékának számításakor szokás a szekrényt egyenletes tömegeloszlásúnak feltételezni), vagy ha mód van rá, méréssel meghatározni ezeket.

**2. lépés: a modellezendő szabadságfokok számának megállapítása.** Itt számba kell venni, hogy milyen irányú elmozdulásokat és milyen tengely körüli szögelfordulásokat kell a szimulációs feladatban modellezni. Ebből az is következik, hogy a dinamikai modell tömegelemei pontszerűek lesznek-e (csak elmozdulásokat kell modellezni, pl. a 2.6.2 fejezetben tárgyalt modellek), vagy megadott méretű téglatestek, amelyek a tömegük mellett meghatározott tehetetlenségi nyomatékokkal rendelkeznek (pl. a 2.6.3 – 2.6.6 fejezetek modelljei). Fontos a használt koordináta-rendszer rögzítése is: szokás az x-tengelyt a vizsgált jármű (vonat) mozgásának irányában felvenni, a z-tengely természetesen felfelé mutat, az y-tengelyre így a vízszintesen balra mutató irány marad (jobbsodrású rendszer esetén).

**3. lépés: a koordinátavektor meghatározása.** Miután rögzítettük a modell szabadságfoka számértékét, valamint a szabadságfokból és a tömegek alakjából következő elmozdulásokat és szögelfordulásokat, ezekre a koordinátákra rögzíteni kell egy meghatározott jelölési rendszert és koordináta-sorrendet. Ennek a kitűzése és betartása azért célszerű, mert a gyakorlatban előforduló üzemszimulációs feladatokhoz tartozó dinamikai modellek szabadságfoka meglehetősen nagy (a következőkben tárgyalt típusfeladatokéhoz képest sokkal nagyobbak, a típusfeladatok korlátozott méretét a jelen Segédletben a bemutatathóság is indokolta), a mozgásegyenletrendszer meglehetősen sok egyenletből (esetenként 20 – 30-nál is több) áll, ezért az áttekinthetőség (és főleg az esetleges hibakeresések) megkönnyítése is megköveteli egy alkalmas változó-jelölési rendszert alkalmazását. Ennek a részleteit az egyes típusfeladatoknál ismertetjük.

A koordináták megállapítása után a hozzájuk tartozó sebességeket is fel kell venni, majd a koordinátavektor rögzítése után a szokásos módon az **állapotvektort** is meg kell határozni.

**4. lépés: a tömegelemek kapcsolódási pontjainak elmozdulásai és sebességei.** A tömegekre ható erők ismeretéhez meg kell határozni a kapcsolati pontok elmozdulásait és sebességeit, hogy ezekkel a rugalmas és disszipatív erőket meghatározzuk. Fontos, hogy ezeket az elmozdulásokat és sebességeket az állapotvektor összetevőinek függvényében írjuk fel, mert a modell differenciálegyenleteiben csak ezek az ismeretlenek maradhatnak.

**5. lépés: a tömegeket összekapcsoló erők meghatározása.** A 4. lépésben meghatározott elmozdulásokkal és sebességekkel (valamint a rugalmas és disszipatív kapcsolatokhoz tartozó valóságos, vagy helyettesítő rugómerevségek és csillapítási együtthatók, illetve karakterisztikák) segítségével összeállíthatjuk az erők között ható minden kapcsolati erő képletét.

**6. lépés: a mozgásegyenletek összeállítása.** A tehetetlenségi erők és a kapcsolati erők ismeretében minden tömegelem minden figyelembe vett elmozdulására, illetve szögelfordulására felírhatjuk a dinamikus erőegyensúlyt **Newton II. törvénye** segítségével.

A következőkben a dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldása során felmerülő hibákkal foglalkozunk.

### 2.6.2 A dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldása során felmerülő hibák

A dinamikai modell mozgásegyenletei általában másodrendű differenciálegyenletek, amelyek független változója a  $t$  idő. Ezek a másodrendű differenciálegyenletek lehetnek állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletek, vagy egyszerűen csak közönséges differenciálegyenletek. Akármelyik típusú differenciálegyenlet is tartozzék a vizsgált dinamikai modellhez, a megoldás igen sok számítási munkával jár, mivel a dinamikai modellek szabadságfoka általában elég nagy, ennek megfelelően a differenciálegyenletek száma is az. A sok számítás során (természetesen ezt már csak gépesítve lehet végrehajtani) sok számítási hiba is felmerülhet, amelynek nagysága elég ritkán becsülhető megbízhatóan, az esetek nagy többségében még használható hibabecslési módszer sem áll rendelkezésre.

A alábbiakban először áttekintjük a felmerülő hibák általános tulajdonságait, a további fejezetben az alkalmazható megoldási módszerek tárgyalása során részletesen is kitérünk a felmerülő hibák típusaira és azok becslési lehetőségeire.

A felmerülő hibák legfontosabb fajtái: a **kezdeti hibák** (adathibák, a kezdeti feltételek hibái), a **számábrázolási hibák** (kerekítési hibák) és a **képlethibák** (csonkítási hibák).

**a/ A kezdeti hibák.** Ide tartoznak a dinamikai modell számadatai által hordozott hibák (tömegek, tehetetlenségi nyomatékok, geometriai adatok, jelleggörbék, stb.), valamint középük tartoznak a kezdeti feltételek is. Ha egy meghatározott járműhöz kell modellt készíteni, a jármű adatai általában mérési eredmények, amelyeknek a mérési hibái nagyon eltérhetnek. Egy tömegnek (súlyerőnek) vagy egy geometriai adatnak a mérési relatív hibája gondos méréssel akár **1 %-re** is csökkenthető, de a tehetetlenségi nyomatékok mérése már sokszor nagyságrenddel nagyobb hibával hajtható csak végre. Sok esetben a nehezen megszervezhető és végrehajtható mérés helyett különböző közelítő számításokat kénytelenek alkalmazni (pl. egy kocsiszekrény tehetetlenségi nyomatéka), ekkor a számított eredmény a valóságos tehetetlenségi nyomatéktól akár 30 ~ 100 %-kal is eltérhet.

A különböző jelleggörbék (vonóerő-sebesség görbesereg, rugók és lengéscsillapítók jelleggörbéje, stb.) összetett eredetű hibákat hordozhatnak. A görbék meghatározásához minden egyes görbéhez minél több pontot kell méréssel meghatározni, minden egyes mért pont hordozza a maga relatív hibáját. Amikor a mért pontokra görbét illesztnek, e görbéknek az egyes mért pontoktól mérhető eltérése elég tág határok között változhat, így a görbe által képviselt hiba még a görbe mentén is jelentősen változhat.

**b/ A számábrázolási hibák.** A számábrázolási hibák ([11]-641. oldalon ezt a hibát kerekítési hibának nevezik) onnan erednek, hogy a számolás során hány értékes jegyet veszünk figyelembe (akár kézi számítás esetén, akár zsebszámológép, PC, stb. használata esetén). A figyelembe vett értékes jegyek száma emiatt erősen eltérhet. Egyszerű zsebszámológépek számábrázolása 7-8 jegyű, fejlettebb programozható zsebszámológépek 10-11 jeggyel ábrázolják a számokat. Személyi számítógépek a byte-szervezésű memóriában az alapváltozatban 4 byte-on ábrázolnak egy valós számot exponenciális alakban, így a törtrész többnyire 23 biten van ábrázolva és kb 8 jegyet tartalmaz, a kitevő pedig 8 bites alakban -126-tól +127-ig terjed. A programban beállítható duplapontos változatban a valós szám 8 byte-on van ábrázolva, és így a törtrész 52 bit segítségével kb 16 decimális jegyet tartalmaz, a kitevő 11 bit segítségével -1022-től +1023-ig terjed.

(Ezek a számadatok a [12] forrásműből származnak. Az idézett „körülbelül” szó nincs a leírásban részletezve, valószínűleg azt jelenti, hogy a 8., illetve a 16. jegy már kerekített.)

**c/ A képlethibák.** ([11]-641. oldalon ezt a hibát – talán kissé félreérthetően – csonkítási hibának nevezik, tehát nem a számábrázolással függ össze.) Ezek a hibák akkor merülnek fel,

ha az ú. n. „pontos” érték ismeretének hiányában olyan számítási eljárást alkalmazunk, amely a „pontos” értéket csak közelítőleg adja meg. Ilyen eset pl. a szögfüggvények értékének meghatározása, akár a végtelen sorával számolunk és csak bizonyos számú értékes számjegyig végezzük el a számítást, akár függvénytáblázatot, akár számológépet alkalmazunk. Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása során minden egyes diszkrét függvényérték meghatározásánál felmerül ilyen hiba. Az egyes numerikus módszerek ismertetése során a szóbanforgó módszerre jellemző képlethibát a módszer bemutatása során fogjuk tárgyalni.

### 2.6.3 A dinamikai modell mozgásegyenleteinek megoldási lehetőségei

Amint azt más korábban elmondtuk, a vasúti járművek üzemszimulációs modelljeinek mozgásegyenletei általában másodrendű, inhomogén differenciálegyenletek, amelyek lehetnek lineárisak és állandó együtthatóságok, ha a rugalmas és disszipatív erőkapcsolatok jelleggörbéi lineárisak, továbbá a kerék-sín gördülő érintkezéséhez tartozó kapcsolati erőket szintén lineáris összefüggések írják le; míg más esetekben a differenciálegyenletek egyszerűen csak „közönségesek”.

Előfordulhatnak bizonyos esetekben olyan dinamikai modellek (pl. rugalmas távvezeték lengéseit leíró modell), amelyek nem lineárisak, és nem állandó együtthatóságok, sőt a közönséges differenciálegyenletekre vonatkozó kritériumokat sem elégitik ki. Ezekkel a modellekkel ezen Oktatási Segédletben nem foglalkozunk. Ezekre az esetekre pl. a [11] forrásmű adhat segítséget.

Az Oktatási Segédletben tárgyalt dinamikai modellek egyik részének a mozgásegyenletei **állandó együtthatós, lineáris inhomogén differenciálegyenletek**, amelyeknél meg lehet kísérelni az analitikus megoldást. Ebben az esetben az inhomogén differenciálegyenlet  $\mathbf{y}(t)$  általános megoldása a homogén egyenlet  $\mathbf{Y}(t)_{\text{hom., ált.}}$  általános megoldásából és az inhomogén egyenlet egyik partikuláris megoldásából tevődik össze ([11].-256. o., [14].-748. o.):

$$y(t) = Y(t)_{\text{hom., ált.}} + y(t)_{\text{part}}$$

(Ez egyenletrendszerre is értelemszerűen vonatkozik.) A megoldási módszerekről, azok lépéseiről bővebben a [11].-256. oldalán, valamint a [14].- 752. oldalán, továbbá a 2.6.3.1 fejezetben találhatunk.

Itt meg kell még jegyezni, hogy a szimulációs feladatban megfogalmazott problémától függően kell eldönteni, hogy csak az  $\mathbf{Y}(t)_{\text{hom., ált.}}$  általános megoldást, csak az  $\mathbf{y}(t)_{\text{part}}$  partikuláris megoldást, vagy mindkettőt kell-e meghatározni. Ha a dinamikai modell külső erők hatására végbement (még ha rövid ideig is tartó) indítási folyamatot szimulál, akkor mindkettőt meg kell határozni. Ha egy hosszú időtartamú (többnyire periódikus) gerjesztésre adott állandósult választ kell modellezni, elegendő az  $\mathbf{y}(t)_{\text{part}}$  partikuláris megoldást meghatározni. Ha egy adott kezdeti feltétellel (elmozdulással és sebességgel) elindított jármű (vonat) szabad mozgását kell szimulálni, akkor elegendő a homogén egyenlet(ek)  $\mathbf{Y}(t)_{\text{hom., ált.}}$  általános megoldását meghatározni.

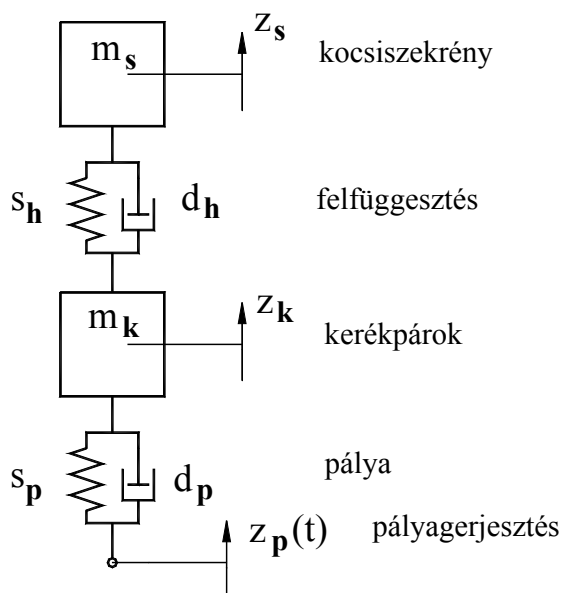
Ha az említett állandó együtthatós, lineáris (homogén, vagy inhomogén) differenciálegyenletek analitikus megoldása valamilyen oknál fogva nem jöhet szóba, vagy a differenciálegyenletek csak a **közönséges differenciálegyenletekre** vonatkozó feltételeket elégitik ki (tehát sem nem állandó együtthatóságok, sem nem lineárisak), akkor ezekben az esetekben az a leg egyszerűbb, ha egy alkalmas numerikus megoldási módszert választunk. Ennek a részleteit a 2.6.3.2 fejezetben mutatjuk be. A dinamikai modelljeinkben akkor fordulnak elő ilyen közönséges differenciálegyenletek, ha a rugalmas és disszipatív erőkapcsolatok jelleggörbéit vagy alkalmas magasabb fokszámú polinómok adják meg, vagy méréssel meghatározott számérté-

kek pontsorát, illetve e pontokat összekötő egyenes szakaszok sorát használjuk a jelleggörbék helyett. Ide tartozik még a kerék-sín gördülő érintkezésének olyan esete is, amikor a kapcsolati erőket valamilyen nemlineáris eljárással (pl. FASTSIM) határozzuk meg. A szóba jöhető numerikus módszereket [11].-639. oldalán találhatjuk meg, ezzel a 2.6.3.2 fejezetben foglalkozunk.

### 2.6.3.1 Másodrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletek analitikus megoldása

A tárgyalt dinamikai modellek mozgásegyenletei akkor oldhatók meg analitikusan, ha a differenciálegyenletek lineárisak és állandó együtthatósak. Ennek a feltételeit az előzőkben soroltuk fel. Amint az rövidesen ki fog derülni, az analitikus megoldási módszer mellett bizonyos részlépések (pl. a sajátértékek meghatározása, a gerjesztésre adott állandósult válasz meghatározása) numerikus módszer használatát is igénylik. Látni fogjuk, hogy mindezeknél még olyan más megoldási nehézségek is felmerülnek, amik miatt ezen differenciálegyenletek megoldására általában nem alkalmaznak analitikus módszereket. Az analitikus módszer részleteit azért mutatjuk be, mert a megoldás algebrai függvény. Ez azt jelenti, hogy a teljes vizsgált időtartam folyamán ugyanazt a képletet használjuk, bármelyik időpillanathoz tartozó függvényértéket határozzunk is meg, mégha a megoldás algebrai képlete esetenként nagyméretű és bonyolult szerkezetű is. Ebből következik, hogy nem kell tartani az egyes  $\Delta t$  időlépések során halmozódó tovaterjedő hibáktól, mert a függvényegyütthatókat ugyanaz a számítási hiba terheli, a független változó (az idő) értékétől függetlenül. Ez az előny adott esetben indokoltá teheti, hogy vállaljuk az analitikus módszer alkalmazásának nyilvánvaló nehézségeit.

A megoldás levezetését kétszabadságfokú dinamikai modell példáján mutatjuk be, hogy a levezetés még áttekinthető méretű legyen. Ez a modell egy vasúti jármű függőleges mozgását szimulálja a pályahibák gerjesztő hatása következtében. A kocsiszekrényt egyetlen pontszerű tömeg, a kerékpárok egyesített tömegét is egyetlen pontszerű tömeg képviseli (2.23 ábra):



2.23 ábra

Legyen a pályaalaktól származó gerjesztés egyszerű harmonikus függvény:

$$z_p(t) = z_0 \cdot \sin \omega t$$



A dinamikai modell mozgásegyenletei a következők:

$$m_s \cdot \ddot{z}_s + d_h \cdot \dot{z}_s + s_h \cdot z_s - d_h \cdot \dot{z}_k - s_h \cdot z_k = 0$$

$$m_k \cdot \ddot{z}_k - d_h \cdot \dot{z}_s + (d_h + d_p) \cdot \dot{z}_k - s_h \cdot z_s + (s_h + s_p) \cdot z_k = d_p \cdot z_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t + s_p \cdot z_0 \cdot \sin \omega t$$

A modell szabadságfoka **2**, a  $\mathbf{z}_s$  és  $\mathbf{z}_k$  elmozdulásokból alkotott koordinátavektor:

$$\underline{\mathbf{z}} = [z_s; z_k]^T$$

a sebességvektor:  $\underline{\dot{\mathbf{z}}} = [\dot{z}_s; \dot{z}_k]^T = [v_s; v_k]^T = \underline{\mathbf{v}}$

és a gyorsulásvektor:  $\underline{\ddot{\mathbf{z}}} = [\ddot{z}_s; \ddot{z}_k]^T = [\dot{v}_s; \dot{v}_k]^T = \underline{\dot{\mathbf{v}}}$

[Az új változók bevezetése (pl.  $\dot{z}_s$  helyett  $v_s$ ) azért célszerű, mert amikor az  $\underline{\mathbf{A}}$  rendszer-mátrixot bevezetjük, az elsőrendűvé transzformált differenciálegyenletrendszer áttekinthetőbb lesz. A „T” felső index az oszlopvektoroknak sorvektorokká való transzpozícióját jelzi a kényelmesebb írásmód érdekében.]

Tegyük fel, hogy a tárgyalt szimulációs feladatban a bekapcsolási folyamatok modellezése is szükséges, így mind az  $\mathbf{Y}(\mathbf{t})_{\text{hom, ált.}}$ , mind az  $\mathbf{y}(\mathbf{t})_{\text{part}}$  függvényét meg kell határozni. Először az  $\mathbf{Y}(\mathbf{t})_{\text{hom, ált}}$  általános megoldást kell levezetni. Ehhez az differenciálegyenletrendszer homogén része szükséges, amit a már bemutatott mátrix-vektoros alakban használunk fel:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{z}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{z}}} + \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$$

ahol a tömegmátrix:  $\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_k \end{bmatrix}$ ; a csillapítási mátrix:  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} d_h & -d_h \\ -d_h & d_h + d_p \end{bmatrix}$

és a merevségi mátrix:  $\underline{\underline{\mathbf{S}}} = \begin{bmatrix} s_h & -s_h \\ -s_h & s_h + s_p \end{bmatrix}$

Ezek a mátrixok 2x2 méretűek, összhangban az  $n = 2$  szabadságfokkal.

Most ki kell fejezni  $\underline{\ddot{\mathbf{z}}}$  értékét, ehhez át kell alakítani a mátrix-vektoros alakot:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot \underline{\ddot{\mathbf{z}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{z}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{0}}$$

Ebből:  $\underline{\ddot{\mathbf{z}}} = -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} \cdot \underline{\dot{\mathbf{z}}} - \underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \cdot \underline{\mathbf{z}}$

Most bevezethetjük az állapotvektort:  $\underline{\mathbf{y}} = [\underline{\mathbf{v}}; \underline{\mathbf{z}}]^T = [v_s, v_k, z_s, z_k]^T$

Az állapotvektornak így  $2 \cdot n = 4$  eleme van.

Ezzel a mozgásegyenletrendszer homogén részének újabb alakja:

$$\underline{\dot{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{\mathbf{v}}} \\ \underline{\dot{\mathbf{z}}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{D}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{S}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{E}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{v}} \\ \underline{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{y}}$$

ahol  $\underline{\underline{A}}$  négyzetes,  $2n \times 2n$  méretű mátrix,  $\underline{\underline{E}}$  egységmátrix (a főátló elemei 1.0, minden többi

zérus), továbbá: 
$$-\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} -\frac{d_h}{m_s} & \frac{d_h}{m_s} \\ \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} \end{bmatrix}; \text{ és } -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} -\frac{s_h}{m_s} & \frac{s_h}{m_s} \\ \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \end{bmatrix}$$

Az  $\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}}$  mátrix-vektor szorzat kifejtve olyan  $2 \cdot n$  méretű oszlopvektor, amelynek egy-egy eleme az eredeti másodrendű differenciálegyenletek elsőrendűvé transzformált alakjában egy-egy egyenlet együtthatóit adja meg. Így a kapott négy elsőrendű differenciálegyenlet:

$$\dot{v}_s = -\frac{d_h}{m_s} \cdot v_s + \frac{d_h}{m_s} \cdot v_k - \frac{s_h}{m_s} \cdot z_s + \frac{s_h}{m_s} \cdot z_k$$

$$\dot{v}_k = \frac{d_h}{m_k} \cdot v_s - \frac{d_h + d_p}{m_k} \cdot v_k + \frac{s_h}{m_k} \cdot z_s - \frac{s_h + s_p}{m_k} \cdot z_k$$

$$\dot{z}_s = v_s$$

$$\dot{z}_k = v_k$$

A differenciálegyenletrendszer egy-egy egyenletének megoldását exponenciális függvény alakjában keressük, összhangban az előző fejezetben említett  $y(t) = \sum_{i=1}^{2 \cdot n} C_i \cdot e^{\lambda_i \cdot t}$  függvényösszeggel:

$$y = h \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

ahol  $\lambda$  az ismeretlen kitevő és  $h$  a függvény ismeretlen együtthatója. Mivel  $2 \cdot n$  db egyenlet van:

$$y_1 = h_1 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$y_2 = h_2 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$y_3 = h_3 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

$$y_4 = h_4 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

amelyek az egyszerűbb írásmód kedvéért vektoros alakba is írhatók:

$$\underline{\underline{y}} = \underline{\underline{h}} \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

Ezt behelyettesíthetjük a differenciálegyenletrendszer  $\dot{\underline{\underline{y}}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}}$  mátrix-vektoros alakjába. Mivel  $\dot{\underline{\underline{y}}}(t) = \lambda \cdot \underline{\underline{h}} \cdot e^{\lambda \cdot t}$ , ezért  $\lambda \cdot \underline{\underline{h}} \cdot e^{\lambda \cdot t} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{h}} \cdot e^{\lambda \cdot t}$ . Mivel  $e^{\lambda \cdot t} \neq 0$ , ezért  $\lambda \cdot \underline{\underline{h}} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{h}}$ , átrendezve:

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{h}} = \underline{\underline{0}}$$

Ez a mátrix-vektor szorzat olyan  $2 \cdot n$  db homogén, lineáris algebrai egyenletből álló egyenletrendszert képvisel, amelynek az együtthatóit az  $(\underline{\underline{A}} - \lambda \cdot \underline{\underline{E}})$  mátrix tartalmazza, az ismeretlenjei pedig a  $\underline{\underline{h}}$  vektor elemei. Ismert dolog, hogy a homogén, lineáris, algebrai

egyenletrendszer ismeretlenjei csak akkor különböznek az ún. „triviális” megoldástól ( $h_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, 2n$ ), ha az együttható-mátrixhoz tartozó determináns kifejtésének értéke zérus. Ha kifejtjük ezt a determinánst,  $2n$  fokszámú polinómot kapunk  $\lambda$ -ra. Ezt a polinómot karakterisztikus polinómnak nevezik, amelynek  $2n$  db gyöke van. Ez a  $2n$  db  $\lambda$  érték az A mátrix **sajátértékei**. Ezeket meghatározva és sorban behelyettesítve a homogén egyenletrendszerbe,  $2n$  db h vektort kapunk, minden sajátértékhez egyet. Ezeket a h vektorokat az A mátrix **sajátvektorainak** nevezik.

A tárgyalt modell esetében a szabadságfokok száma  $n = 2$ , tehát  $2n = 2 \cdot 2 = 4$  változónk van ( $v_s, v_k, z_s$  és  $z_k$ ), a karakterisztikus polinóm 4-edfokú, amelynek 4 gyöke van, továbbá 4 db, egyenkint 4 elemű h sajátvektort kapunk. Így a megoldásfüggvényeik alakja:

$$\underline{y}(t) = \underline{h}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + \underline{h}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \underline{h}_3 \cdot e^{\lambda_3 t} + \underline{h}_4 \cdot e^{\lambda_4 t}$$

Az egyes egyenletekre ezt az összefüggést úgy részletezhetjük, hogy a sajátvektorok elemeit kettős indexszel látjuk el, az első index megegyezik a  $\lambda$  sajátérték indexével, a második az egyes változók indexe. Ekkor a 4 megoldásfüggvény:

$$v_s(t) = h_{11} \cdot e^{\lambda_1 t} + h_{21} \cdot e^{\lambda_2 t} + h_{31} \cdot e^{\lambda_3 t} + h_{41} \cdot e^{\lambda_4 t}$$

$$v_k(t) = h_{12} \cdot e^{\lambda_1 t} + h_{22} \cdot e^{\lambda_2 t} + h_{32} \cdot e^{\lambda_3 t} + h_{42} \cdot e^{\lambda_4 t}$$

$$z_s(t) = h_{13} \cdot e^{\lambda_1 t} + h_{23} \cdot e^{\lambda_2 t} + h_{33} \cdot e^{\lambda_3 t} + h_{43} \cdot e^{\lambda_4 t}$$

$$z_k(t) = h_{14} \cdot e^{\lambda_1 t} + h_{24} \cdot e^{\lambda_2 t} + h_{34} \cdot e^{\lambda_3 t} + h_{44} \cdot e^{\lambda_4 t}$$

A megoldások meghatározásának első részfeladata tehát az, hogy határozzuk meg a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  és  $\lambda_4$  sajátértékeket, majd a második részfeladatban mindegyik  $\lambda_i$  sajátértékhez meg kell határozni a  $\lambda_i$  gyökhöz tartozó  $h_i$  sajátvektor elemeit:

Az első részfeladatban a  $\lambda$  sajátértékek meghatározásához meg kell határozni a karakterisztikus polinómot. Ehhez ki kell fejteni az  $(\underline{A} - \lambda \underline{E})$  együttható-mátrixhoz tartozó determinánst:

$$\det(\underline{A} - \lambda \underline{E}) = 0 =$$

$$= \det \left[ \begin{array}{cccc|cccc} \frac{d_h}{m_s} & \frac{d_h}{m_s} & -\frac{s_h}{m_s} & \frac{s_h}{m_s} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} & \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] - \lambda \cdot \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \det \begin{bmatrix} -\frac{d_h}{m_s} - \lambda & \frac{d_h}{m_s} & -\frac{s_h}{m_s} & \frac{s_h}{m_s} \\ \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} - \lambda & \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \\
&= -\left(\frac{d_h}{m_s} + \lambda\right) \begin{vmatrix} \frac{d_h + d_p}{m_k} - \lambda & \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{d_h}{m_s} \begin{vmatrix} \frac{d_h}{m_k} & \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} - \\
&-\frac{s_h}{m_s} \begin{vmatrix} \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} - \lambda & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} - \frac{s_h}{m_s} \begin{vmatrix} \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} - \lambda & \frac{s_h}{m_k} \\ 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \lambda^4 + \left(\frac{d_h + d_p}{m_k} + \frac{d_h}{m_s}\right) \lambda^3 + \left[\frac{d_h \cdot (d_h + d_p)}{m_s \cdot m_k} + \frac{s_h + s_p}{m_k} - \frac{d_h^2}{m_s \cdot m_k} + \frac{s_h}{m_s}\right] \lambda^2 + \\
&+ \left[\frac{d_h \cdot (s_h + s_p)}{m_s \cdot m_k} - \frac{d_h \cdot s_h}{m_s \cdot m_k} + \frac{s_h \cdot (d_h + d_p)}{m_s \cdot m_k} - \frac{s_h \cdot d_h}{m_s \cdot m_k}\right] \lambda + \\
&+ \frac{s_h \cdot (s_h + s_p)}{m_s \cdot m_k} - \frac{s_h^2}{m_s \cdot m_k} = 0
\end{aligned}$$

Negyedfokú polinóm gyökeinek meghatározása csak numerikus módszerrel lehetséges. Figyelemre méltó, hogy már kétszabadságfokú modell esetében is csak numerikus módszer használható, tehát ha a legegyszerűbb, egyszabadságfokú modellektől eltekintünk, kimondható, hogy minden, a műszaki gyakorlatban számbajöhető dinamikai modell esetében a karakterisztikus polinóm gyökeinek – tehát az  $\underline{A}$  rendszermatrix sajátértékeinek – meghatározása csak numerikus módszer alkalmazásával lehetséges. Erre a célra elterjedten használják a **Bairstowe** módszert ([11]-645.o.), amely a polinóm gyökeit másodfokú gyöktényező-polinómokra történő szétbontással határozza meg. Komplet, kidolgozott számítógépi programokhoz is hozzájuthatunk, [13]-9. oldalán az SSP programcsomag PRBM, illetve DPRBM nevű szubrutinjai vannak megemlítve.

A gyakorlatban előforduló polinómok gyökei  $2n$  darab páronként konjugált komplex mennyiség, ha a modell nem végez haladó mozgást. Más esetben az egyik gyökpár valós mennyiség, ha a modell haladó mozgást is végez. A tárgyalt mintapélda dinamikai modelljének esetében  $2n = 4$ , így a gyökök:

$$\lambda_1 = -a_1 + j.b_1$$

$$\lambda_2 = -a_1 - j.b_1$$

$$\lambda_3 = -a_2 + j.b_2$$

$$\lambda_4 = -a_2 - j.b_2$$

Ha a karakterisztikus polinóm gyökei (az  $\underline{A}$  rendszermátrix sajátértékei) ismertek, a második részfeladat kerülhet sorra, amely a sajátvektorok meghatározását tűzte ki célul. Ennek során ki kell számítanunk az  $(\underline{A} - \lambda.\underline{E})\underline{h} = \underline{0}$  mátrix-vektor szorzat által képviselt homogén lineáris algebrai egyenletrendszer  $\mathbf{h}_{i,j}$  ismeretlenjeit minden egyes  $\lambda_i$  sajátértékre. Így  $2n \times 2n$  darab számértéket kapunk, amelyet a már említett  $i, j$  kettős indexszel láthatunk el:

$$h_{i,j}, [i = 1, \dots, 2n (\lambda \text{ indexe}), j = 1, \dots, 2n (\text{az állapotvektor elemeinek indexe})]$$

A homogén, lineáris, algebrai egyenletrendszerek megoldása során mindenekelőtt azt kell tisztázni, hogy létezik-e a triviálistól eltérő megoldás. Ez az előbbieken megtörtént, kiderült, hogy  $2.n = 4$  darab  $\lambda$  sajátérték esetében van a triviálistól eltérő megoldás.

A következő lépés annak eldöntése, hogy a homogén algebrai egyenletrendszer együtthatóinak  $\det(\underline{A} - \lambda.\underline{E})$  determinánsában van-e olyan elem, amelyhez zérus értékű aldetemináns tartozik. Viszonylag könnyen meggyőződhetünk arról, hogy a vizsgált  $\det(\underline{A} - \lambda.\underline{E})$  determinánsban nincs ilyen elem, bármelyik elemhez tartozó aldetemináns értéke zérustól különbözik. Ebből következik, hogy (lásd [14].-171. o.) az egyenletrendszer egyenletei között van **következmény-egyenlet**, amelyet elhagyhatunk. Ha van következmény-egyenlet, az az egyenletek bármelyike lehet, mert a  $2.n$  darab egyenlet közül bármelyiket elő lehet állítani a megmaradt  $2.n-1$  egyenlet lineáris kombinációjával.

A példaul választott dinamikai modell esetében ez az algebrai egyenletrendszert:

$$(\underline{A} - \lambda.\underline{E})\underline{h} = \underline{0}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{d_h}{m_s} - \lambda & \frac{d_h}{m_s} & -\frac{s_h}{m_s} & \frac{s_h}{m_s} \\ \frac{d_h}{m_k} & -\frac{d_h + d_p}{m_k} - \lambda & \frac{s_h}{m_k} & -\frac{s_h + s_p}{m_k} \\ 1 & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ h_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ebből a négy algebrai egyenlet:

$$\begin{bmatrix} -\frac{d_h}{m_s} - \lambda \end{bmatrix} .h_1 + \frac{d_h}{m_s} .h_2 - \frac{s_h}{m_s} .h_3 + \frac{s_h}{m_s} .h_4 = 0$$

$$\frac{d_h}{m_k} .h_1 - \left[ \frac{d_h + d_p}{m_k} + \lambda \right] .h_2 + \frac{s_h}{m_k} .h_3 - \frac{s_h + s_p}{m_k} .h_4 = 0$$

$$h_1 - \lambda .h_3 = 0$$

$$h_2 - \lambda .h_4 = 0$$

A négy algebrai egyenlet közül az egyik elhagyható, legyen ez a második. Ekkor az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{d_h}{m_s} - \lambda \right] \cdot h_1 + \frac{d_h}{m_s} \cdot h_2 - \frac{s_h}{m_s} \cdot h_3 + \frac{s_h}{m_s} \cdot h_4 &= 0 \\ h_1 - \lambda \cdot h_3 &= 0 \\ h_2 - \lambda \cdot h_4 &= 0 \end{aligned}$$

Ekkor az egyik ismeretlen, pl. a  $\mathbf{h}_4$  függvényében előállíthatjuk  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$  és  $\mathbf{h}_3$  értékeit. Ezt mind a négy  $\lambda$  sajátértékre meg kell tennünk. Legyen először  $\lambda = \lambda_1$ , ekkor az ismeretlenek  $\mathbf{h}_1$ ,  $\mathbf{h}_2$ ,  $\mathbf{h}_3$  és  $\mathbf{h}_4$  lesznek.

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{d_h}{m_s} - \lambda_1 \right] \cdot h_{11} + \frac{d_h}{m_s} \cdot h_{12} - \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{13} + \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{14} &= 0 \\ h_{11} - \lambda_1 \cdot h_{13} &= 0 \\ h_{12} - \lambda_1 \cdot h_{14} &= 0 \end{aligned}$$

Mint említettük, homogén algebrai egyenletrendszer esetében az egyik ismeretlen értéke felvehető. Esetünkben  $\mathbf{h}_{14}$  kínálkozik erre a célra. Ekkor a harmadik egyenletből:

$$h_{12} = \lambda_1 \cdot h_{14}$$

Ezt behelyettesítve a többi három egyenletbe, kapjuk:

$$\begin{aligned} \left[ -\frac{d_h}{m_s} - \lambda_1 \right] \cdot h_{11} + \frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 \cdot h_{14} - \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{13} + \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{14} &= 0 \\ h_{11} - \lambda_1 \cdot h_{13} &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$h_{11} = \lambda_1 \cdot h_{13}$$

Ezt is behelyettesítve a következő egyenletet kapjuk:

$$\left[ -\frac{d_h}{m_s} - \lambda_1 \right] \cdot \lambda_1 \cdot h_{13} + \frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 \cdot h_{14} - \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{13} + \frac{s_h}{m_s} \cdot h_{14} = 0$$

Összevonások után:

$$-\left[ \left( \frac{d_h}{m_s} + \lambda_1 \right) \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s} \right] \cdot h_{13} + \left[ \frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s} \right] \cdot h_{14} = 0$$

Innen:

$$h_{13} = \frac{\frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}}{\left( \frac{d_h}{m_s} + \lambda_1 \right) \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}} \cdot h_{14}$$

Így végül  $\mathbf{h}_{11}$ ,  $\mathbf{h}_{12}$  és  $\mathbf{h}_{13}$  értékét megkaptuk  $\mathbf{h}_4$  függvényében:

$$h_{11} = \lambda_1 \cdot h_{13} = \frac{\frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}}{\left(\frac{d_h}{m_s} + \lambda_1\right) \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}} \cdot \lambda_1 \cdot h_{14}$$

$$h_{12} = \lambda_1 \cdot h_{14}$$

$$h_{13} = \frac{\frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}}{\left(\frac{d_h}{m_s} + \lambda_1\right) \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}} \cdot h_{14}$$

Bevezetve a  $K_1 = \frac{\frac{d_h}{m_s} \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}}{\left(\frac{d_h}{m_s} + \lambda_1\right) \cdot \lambda_1 + \frac{s_h}{m_s}} = \frac{d_h \cdot \lambda_1 + s_h}{(d_h + m_s \cdot \lambda_1) \cdot \lambda_1 + s_h}$  jelölést, a sajátvektor-

elemek:  $h_{11} = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot h_{14}$

$$h_{12} = \lambda_1 \cdot h_{14}$$

$$h_{13} = K_1 \cdot h_{14}$$

Természetesen a többi három sajátértékhez ( $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  és  $\lambda_3$ ) tartozó  $h_{21}$ ,  $h_{22}$ ,  $h_{23}$ ,  $h_{31}$ ,  $h_{32}$ ,  $h_{33}$ ,  $h_{41}$ ,  $h_{42}$ ,  $h_{43}$  sajátvektor-elemet is meg kell határozni. Így a négy keresett megoldásfüggvény a következő lesz

$$\begin{aligned} v_s(t) &= h_{11} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + h_{21} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + h_{31} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + h_{41} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} = \\ &= K_1 \cdot \lambda_1 \cdot h_{14} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot h_{24} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + K_3 \cdot \lambda_3 \cdot h_{34} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + K_4 \cdot \lambda_4 \cdot h_{44} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_k(t) &= h_{12} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + h_{22} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + h_{32} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + h_{42} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} = \\ &= \lambda_1 \cdot h_{14} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + \lambda_2 \cdot h_{24} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + \lambda_3 \cdot h_{34} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + \lambda_4 \cdot h_{44} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_s(t) &= h_{13} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + h_{23} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + h_{33} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + h_{43} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} = \\ &= K_1 \cdot h_{14} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + K_2 \cdot h_{24} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + K_3 \cdot h_{34} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + K_4 \cdot h_{44} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t} \end{aligned}$$

$$z_k(t) = h_{14} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + h_{24} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} + h_{34} \cdot e^{\lambda_3 \cdot t} + h_{44} \cdot e^{\lambda_4 \cdot t}$$

Látható, hogy mind a négy megoldásfüggvény ugyanannak a  $h_{14}$ ,  $h_{24}$ ,  $h_{34}$  és  $h_{44}$  sajátvektor-elemnek a függvénye, tehát ezek értékeit mi vehetjük fel úgy, hogy a megadott kezdeti feltételeknek megfeleljenek a megoldásfüggvények. Ezek szerepe ugyanaz, mint az integrálási állandóké: adott kezdeti feltételhez kell meghatározni az értékeiket. Legyenek a kezdeti feltételek az alábbiak:

ha  $t = t_0 = 0$ , akkor  $v_s(t_0) = v_{s0}$ ;  $v_k(t_0) = v_{k0}$ ;  $z_s(t_0) = z_{s0}$  és  $z_k(t_0) = z_{k0}$ . Ekkor:

$$v_{s0} = K_1 \cdot \lambda_1 \cdot h_{14} + K_2 \cdot \lambda_2 \cdot h_{24} + K_3 \cdot \lambda_3 \cdot h_{34} + K_4 \cdot \lambda_4 \cdot h_{44}$$

$$v_{k0} = \lambda_1 \cdot h_{14} + \lambda_2 \cdot h_{24} + \lambda_3 \cdot h_{34} + \lambda_4 \cdot h_{44}$$

$$z_{s0} = K_1 \cdot h_{14} + K_2 \cdot h_{24} + K_3 \cdot h_{34} + K_4 \cdot h_{44}$$

$$z_{k0} = h_{14} + h_{24} + h_{34} + h_{44}$$

Meghatározva  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  és  $K_4$  értékét és behelyettesítve a sajátértékek  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  és  $\lambda_4$  számértékét, négy lineáris, inhomogén algebrai egyenletek kapunk, amelyekből az ismeretlen  $h_{14}$ ,  $h_{24}$ ,  $h_{34}$  és  $h_{44}$  sajátvektor-elem meghatározható. A megoldásfüggvények végső alakjának meghatározásakor természetesen az exponenciális függvényeket szögfüggvényé kell átalakítani az Euler-formula alapján:  $e^{\lambda \cdot t} = \cos \lambda \cdot t + j \cdot \sin \lambda \cdot t$ .

Ha megkaptuk az inhomogén, lineáris, állandó együtthatós differenciálegyenletrendszer homogén részének  $v_s(t)_{\text{hom,ált}}$ ,  $v_k(t)_{\text{hom,ált}}$ ,  $z_s(t)_{\text{hom,ált}}$  és  $z_k(t)_{\text{hom,ált}}$  általános megoldását, az inhomogén differenciálegyenletrendszer partikuláris megoldását kell meghatározni. Mivel a műszaki gyakorlatban a mozgásegyenletek jobboldalán legtöbbször exponenciális, illetve harmónikus függvény, ritkábban az idő hatványfüggvénye áll, az ú. n. kísérletező módszert alkalmazhatjuk, amelynek a részleteit pl. [14].-752. oldalán találhatjuk meg. Mivel a jelen számpéldában is harmónikus függvény képviseli a gerjesztést, a kísérletező módszer szerint a partikuláris megoldást  $y(t)_{\text{part}} = A \cdot \sin \omega \cdot t + B \cdot \cos \omega \cdot t$  alakban kell keresni. Tekintve, hogy a kísérletező módszert a szakirodalom a mozgásegyenletek másodrendű alakjából kiindulva mutatja be, ezért a mozgásegyenleteink másodrendű alakját kell felidézniük:

$$m_s \cdot \ddot{z}_s + d_h \cdot \dot{z}_s + s_h \cdot z_s - d_h \cdot \dot{z}_k - s_h \cdot z_k = 0$$

$$m_k \cdot \ddot{z}_k - d_h \cdot \dot{z}_s + (d_h + d_p) \cdot \dot{z}_k - s_h \cdot z_s + (s_h + s_p) \cdot z_k = d_p \cdot z_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega \cdot t + s_p \cdot z_0 \cdot \sin \omega \cdot t$$

Ekkor a partikuláris megoldások alakja:

$$z_s(t)_{\text{part}} = A_s \cdot \cos \omega \cdot t + B_s \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$z_k(t)_{\text{part}} = A_k \cdot \cos \omega \cdot t + B_k \cdot \sin \omega \cdot t$$

Képezzük ezek deriváltjait:

$$\frac{d}{dt} z_s(t)_{\text{part}} = -\omega \cdot A_s \cdot \sin \omega \cdot t + \omega \cdot B_s \cdot \cos \omega \cdot t$$

$$\frac{d}{dt} z_k(t)_{\text{part}} = -\omega \cdot A_k \cdot \sin \omega \cdot t + \omega \cdot B_k \cdot \cos \omega \cdot t$$

Továbbá:

$$\frac{d^2}{dt^2} z_s(t)_{\text{part}} = -\omega^2 \cdot A_s \cdot \cos \omega \cdot t - \omega^2 \cdot B_s \cdot \sin \omega \cdot t$$

$$\frac{d^2}{dt^2} z_k(t)_{\text{part}} = -\omega^2 \cdot A_k \cdot \cos \omega \cdot t - \omega^2 \cdot B_k \cdot \sin \omega \cdot t$$

Behelyettesítve a deriváltakat és szétbontva az egyenleteket a szinuszos és koszinuszos tagokat tartalmazó egyenletekre, kapjuk:



$$-m_s \omega^2 B_s - d_h \omega A_s + s_h B_s + d_h \omega A_k - s_h B_k = 0$$

$$-m_s \omega^2 A_s + d_h \omega B_s + s_h A_s - d_h \omega B_k - s_h A_k = 0$$

$$-m_k \omega^2 B_k + d_h \omega A_s - (d_h + d_p) \omega A_k - s_h B_s + (s_h + s_p) B_k = s_p z_0$$

$$-m_k \omega^2 A_k - d_h \omega B_s + (d_h + d_p) \omega B_k - s_h A_s + (s_h + s_p) A_k = d_p z_0 \omega$$

Összevonások után:

$$(s_h - m_s \omega^2) B_s - d_h \omega A_s + d_h \omega A_k - s_h B_k = 0$$

$$(s_h - m_s \omega^2) A_s + d_h \omega B_s - d_h \omega B_k - s_h A_k = 0$$

$$(s_h + s_p - m_k \omega^2) B_k + d_h \omega A_s - (d_h + d_p) \omega A_k - s_h B_s = s_p z_0$$

$$(s_h + s_p - m_k \omega^2) A_k - d_h \omega B_s + (d_h + d_p) \omega B_k - s_h A_s = d_p z_0 \omega$$

Ez négy egyenletből álló lineáris, inhomogén, algebrai egyenletrendszer, amelynek az ismeretlenjei:  $\mathbf{A}_s$ ,  $\mathbf{A}_k$ ,  $\mathbf{B}_s$  és  $\mathbf{B}_k$ . Ezekre megoldva az algebrai egyenletrendszert, megkaphatjuk az inhomogén differenciálegyenletrendszer egy partikuláris megoldását:

$$v_s(t)_{part} = -\omega A_s \sin \omega t + \omega B_s \cos \omega t \quad (\text{ez } z_s(t)_{part} \text{ deriváltja})$$

$$v_k(t)_{part} = -\omega A_k \sin \omega t + \omega B_k \cos \omega t \quad (\text{ez } z_k(t)_{part} \text{ deriváltja})$$

$$z_s(t)_{part} = A_s \cos \omega t + B_s \sin \omega t$$

$$z_k(t)_{part} = A_k \cos \omega t + B_k \sin \omega t$$

Látható mindezekből, hogy még egy ilyen szerény méretű (2 szabadságfokú) dinamikai modell esetében is milyen nagy mennyiségű számítási munkát kell végrehajtani. Könnyen belátható, hogy a szabadságfokoknak nem túl nagy mértékű megnövekedése esetén a szükséges számítási munka könnyen áttekinthetetlenül nagyra nőhet. Érthető, hogy emiatt még az állandó együtthatós, lineáris differenciálegyenletrendszerek integrálására is általában numerikus megoldási módszert alkalmaznak. Jelen esetben is csak a teljesség kedvéért mutattuk be az analitikus megoldási módszert.

### 2.6.3.2 Közönséges differenciálegyenletek numerikus megoldása

Mozgásegyenletek: 1./ állandó együtthatós, 2. rendű, lineáris, inhomogén differenciál egyenletek

2./ 2. rendű, inhomogén, közönséges differenciálegyenletek

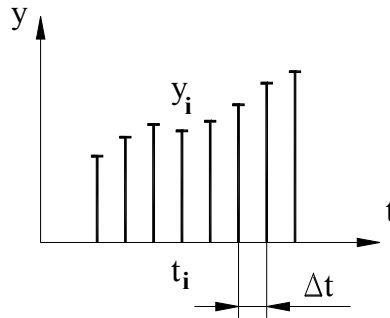
Megoldás: a/ zárt alakú megoldás, de a sajátkörfrekvenciákat csak numerikusan kaphatjuk meg;

b/ numerikus megoldás: elég, ha differenciálegyenletek „közönségesek”, megfelel mind az 1.-nek, mind a 2.-nek. Irodalom: Ralston, Korn & Korn.

Numerikus megoldási módszerek:

Szukcesszív approximáció: zárt, viszonylag kis intervallumon belül, a megoldás folytonos függvény, jól becsülhető az elkövetett hiba.

Törtvonalas módszer: a megoldás csak diszkrét  $(t_i, y_i)$  értékpárok halmaza, az időköz  $\Delta t = t_{i-1} - t_i = \text{áll}$ , de lehet változó is.  
ha  $t_i < t < t_{i+1}$  : mi van a  $\Delta t$ -n belül ?



A megoldás hibái:

1. Kezdeti hibák: főleg adatok (mérési eredmények!) kezdeti értékek
2. Kerekítési hibák (számábrázolási hibák): egyszeres pontosság duplapontos számábrázolás
3. Képlethibák („csonkítási” hibák): a numerikus megoldás mennyire közelíti meg a pontos megoldást

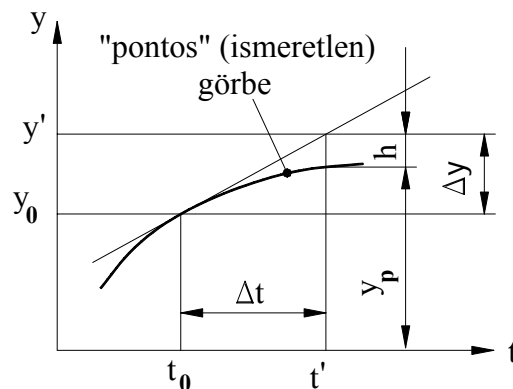
A numerikus megoldásai módszer stabilitása: a módszer stabilis, ha a kezdeti és a kerekítési hibákat nem növeli tovább (gyakorlati definíció). Az elméleti vizsgálat gyakran messzire vezet.

Törtvonalas módszerek.

1. Euler-Cauchy módszer.

$$\text{adott: } y' = \frac{dy}{dx} = f(t, y)$$

és a kezdeti feltételek: ha  $t = t_0$   
akkor::  $y = y_0$



Mivel  $y' = y_0 + \Delta y = y_0 + f(t_0, y_0) \cdot \Delta t \neq y_p$  ;

a képlethiba („csonkítási” hiba):  $h = y' - y_p$  : ez mindig ismeretlen. Nincs becslési módszer.

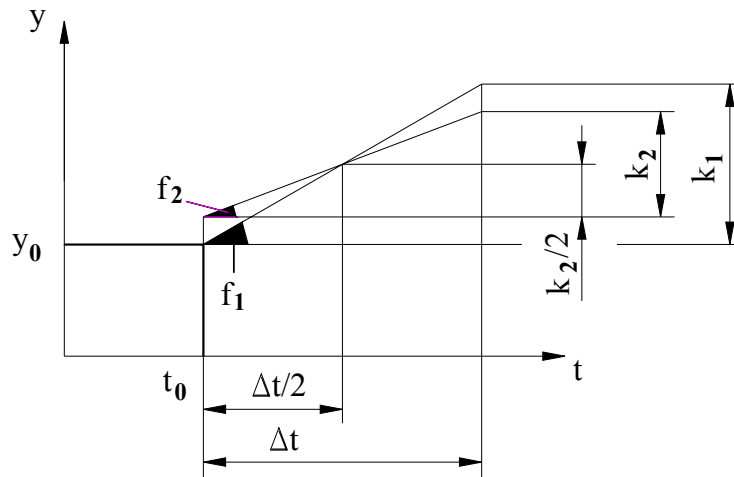
A módszer előnyei:  $y'$  kiszámításához elég **1** behelyettesítés a differenciálegyenletbe (ezért viszonylag gyors);

önállóan meg tud indulni

hátrányai: **h** értékét nem tudjuk megbecsülni, így a hiba tovaterjedését sem tudjuk ellenőrizni. A hiba  $\Delta t$  csökkentésével csökkenthető, de ekkor a lépések száma nő.

## 2. Runge-Kutta típusú módszerek.

Általános jellemző: egynél több  $y'$  értéket határoznak meg, majd ezek súlyozott átlagát képezik. Elterjedt változat: **4** függvényérték. („negyedrendű” módszer)



(Készítés alatt)

## 2.7 A járműüzem szimulációjának néhány típusfeladata

A járműüzem szimulációját sokféleképpen hajthatjuk végre. Ebben a fejezetben a szimulációnak néhány egyszerű alaptípusát mutatjuk be: egy járműnek (vagy vonatnak) egy megadott valóságos pályaszakaszon történő végigfutását szimuláljuk, majd egy adott vasúti jármű mozgását modellezzük, amint az egy megadott pályaszakaszhoz mérésrel regisztrált kereszt- és függőleges pályaalakján fut végig. Áttekintjük a szimulációhoz kidolgozott dinamikai modellek mozgásegyenleteinek (differenciálegyenleteinek) megoldási lehetőségeit, végül a mozgásegyenletek megoldásával kapott mozgásfüggvények megjelenési formáját, illetve felhasználási lehetőségeit vesszük sorra.

### 2.7.1 Vasúti jármű (vagy vonat) dinamikai modelljének felépítése megadott pályaszakaszon való végigfutása szimulálására

A fejezetben tárgyalt üzemszimulációs feladat úgy szól, hogy adva van egy megadott típusú vasúti jármű, vagy egy megadott összetételű vonat (adott típusú mozdony, adott számú és típusú kocs), és ennek a járműnek, vagy vonatnak végig kell futnia egy megadott hosszszelvényű pályaszakaszon. Ezt a végigfutást kell az üzemszimulációs számítással végigkövetni, és a jármű(vek) jellemző mozgásfüggvényeit  $[s(t), v(t), a(t)]$  meghatározni. Ezekkel a számított függvényekkel ellenőrizni lehet az előírt menetrend betartását, illetve betarthatóságát, meg lehet határozni az energiafogyasztást, a gépberendezés egyes elemeinek igénybevitelére bizonyos statisztikai paramétereket kaphatunk meg (várható érték, empirikus szórás, sűrűségfüggvény), stb.

Ehhez a szimulációs számításhoz szükség van a mozdony vonóerő-sebesség görbeseregére, az egyes járművek fékezőerő-sebesség görbeseregére, az egyes járművek alapellenálláserő-sebesség görbéjére, valamint a jármű (vagy vonat) hasznos terhelésének változására az úthossz függvényében (utasok száma, áruk ki- és berakodása, stb.), végül az adott pályaszakasz hosszszelvényének adataira, tehát az emelkedőknek és pályaivsugaraknak, valamint a hozzájuk tartozó pályaszakaszok hosszának számértékeire az út függvényében.

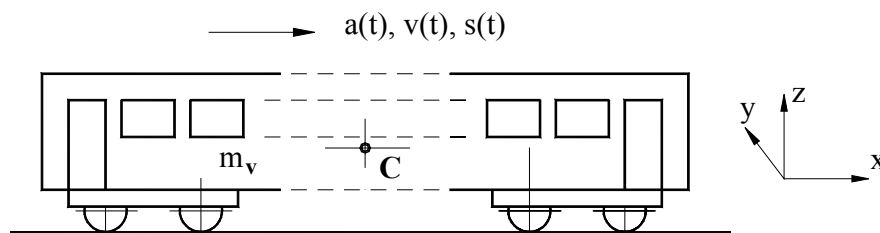
A felsorolt adatok lehetnek a járműtípusra nézve általános érvényű típusadatok, vagy egy-egy konkrét jármű mért adatai, akár minden egyes járműre külön-külön megadva. Ilyen lehet pl. egy mozdonytípus gyárilag megadott vonóerő-sebesség görbeserege, vagy egy konkrét pályaszámú mozdony egyedileg megmért vonóerő-sebesség görbeserege. A pályaszakasz hosszszelvényének minden egyes emelkedő, illetve pályaivsugar adata a szimulációs számításnak bemenő adata kell, hogy legyen. Néha ugyan alkalmaznak olyan egyszerűsítéseket, hogy kis úthosszúságú íveket (pl. kitérők ívei) elhanyagolnak, mindenestre a számítási algoritmusnak készen kell lennie arra, hogy minden egyes, a legrövidebb úthosszúságú emelkedő, vagy pályaivsugar is bemenő adat lehessen. Ilyen adatbeviteli feltételek teljesülése esetén lehet kimondani, hogy a járműüzem szimulációja „testre szabott”.

A járműdinamikai modell felépítésére a gyakorlatban kialakultak bizonyos szabályok, ezeket célszerű lépésről-lépésre betartani, hogy a modell a célnak megfelelő felépítésű legyen. A felépítés folyamatának egyes lépéseit általánosságban már bemutattuk az előző (2.6.1) fejezetben. Itt most a konkrét feladat szempontjából részletezzük ezeket:

**1. lépés: a modellezendő járműtípus megválasztása.** Jelen esetben a modellezendő jármű egy adott típusú mozdonyral vontatott  $N_k$  db adott típusú kocsiból álló vonat, vagy egyetlen jármű (a szabadságfokkal foglalkozó 2. lépésben kiderül, hogy mindegy, hogy jármű, vagy vonat). Ebben a dinamikai modellben a mozdonyra nézve csak annyi megkötést teszünk, hogy hidrodinamikus, vagy villamos erőátvitelű dízelmozdony, vagy villamos mozdony legyen.

(Ezeknél a mozdonyoknál a vonóerő-sebesség görbékben nincsenek olyan szakadási helyek, mint pl. a mechanikus nyomatékvtáló esetében a fokozatváltások helyein.) A vontatott járművek a szokásos két, vagy négytengelyes személy-, vagy teherkocsik lehetnek.

**2. lépés: a modellezendő szabadságfokok száma.** Mivel csak a végigfutást kell modellezni, a pályamenti haladó mozgást tekinthetjük a modell **főmozgásának**. A jármű(vek) egyéb mozgásainak vizsgálatára itt nincs szükség, tehát a **mellékmovgásokat** elhanyagolhatjuk. Így végül **a szabadságfokok száma 1 lesz**. Ebből az következik, hogy még a vonatot is egyetlen tömegnek ( $m_v$ ) tekinthetjük, és mivel a vonat hosszirányú mérete általában elhanyagolható a megtett úthoz képest, ez az egyetlen tömeg **pontszerű** lehet (2.23 ábra). A szimulációhoz szükséges koordinátarendszert a szokásos módon vettük fel, az ábrán látható módon.



2.23 ábra

Ennek nem fog ellentmondani az, hogy a modellben lehetőséget biztosítunk arra, hogy bizonyos mennyiségeket (pl. a menetellenállási erőt) akár járművenként külön-külön lehessen megadni (különböző karbantartási állapotú, bár azonos típusú kocsik menetellenállási ereje között számottevő eltérések lehetnek).

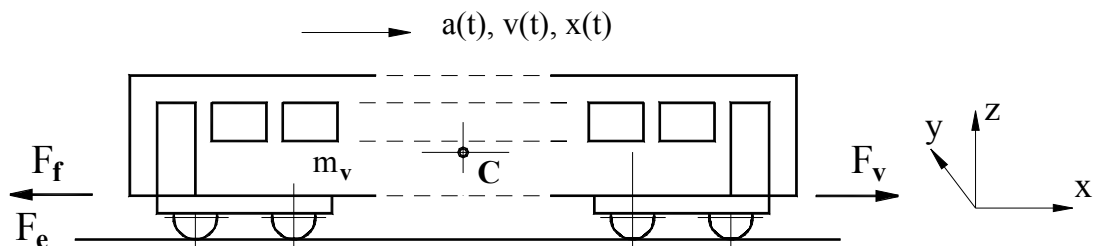
Meg kell még azt is jegyezni, hogy lehetnek olyan szimulációs feladatok, amelyekben más, a jelenleg tárgyalt dinamikai modellben a mellékmovgások közé sorolt mozgástípusok lesznek a főmozgások. Ilyen eset lehet pl. a járművek keresztirányú mozgásai (szítálás és kigyózás), vagy a járművek függőleges mozgásai (rázás és bólintás). Itt a haladó mozgás is mellékmovgás lesz. Ezt a két esetet és a dinamikai modell felépítését a 2.6.3 - 2.6.6 fejezetekben mutatjuk be. Lehet olyan feladat is, hogy a vonat minden egyes kocsijának mozgását külön-külön kell meghatározni, pl. esetleges indítási, vagy fékezési rángatások vizsgálatához; ilyenkor minden egyes jármű mozgásához külön szabadságfok fog tartozni.

**3. lépés: a koordinátavektor meghatározása.** Miután a modellnek egyetlen szabadságfoka van, az egyetlen koordináta  $x$ , a sebesség  $v = \dot{x}$ , tehát nincs koordinátavektor, de van állapotvektor:  $\underline{q} = [v; x]^T$ .

**4. lépés: a tömegelemek kapcsolati pontjainak elmozdulása és sebessége.** Mivel a dinamikai modell egyetlen tömegelemből áll, ezért kapcsolati pontok sincsenek a tömegelemek között.

**5. lépés: a tömegelemek kapcsolati pontjaira ható kapcsolati erők.** A fentiekből következően nincsenek kapcsolati erők sem.

**6. lépés: Az egyes tömegelemek mozgásegyenlete.** Egyetlen tömegelem lévén, elég csak a külső erőket figyelembe venni. Ezek a következők: az  $F_v$  vonóerő, az  $F_f$  fékezőerő és az  $F_e$  menetellenállás-erő (2.24 ábra):



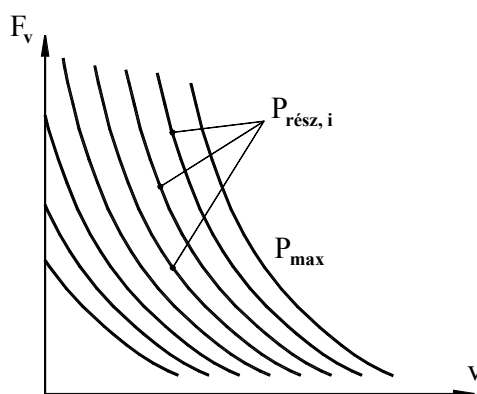
2.24 ábra

Mivel az ábrán feltüntetett  $F_v$  vonóerő és  $F_f$  fékezőerő egyidőben nem hat (feltételezve természetesen a vezérlési rendszer hibátlan működését), külön-külön kell tárgyalnunk a felgyorsítás, illetve sebességtartás esetét, valamint a fékezés esetét:

a/ felgyorsítás esete:  $F_v - F_e = m_v \cdot a_g(t)$ ; ahol a gyorsulás:  $a_g(t) > 0$ ;

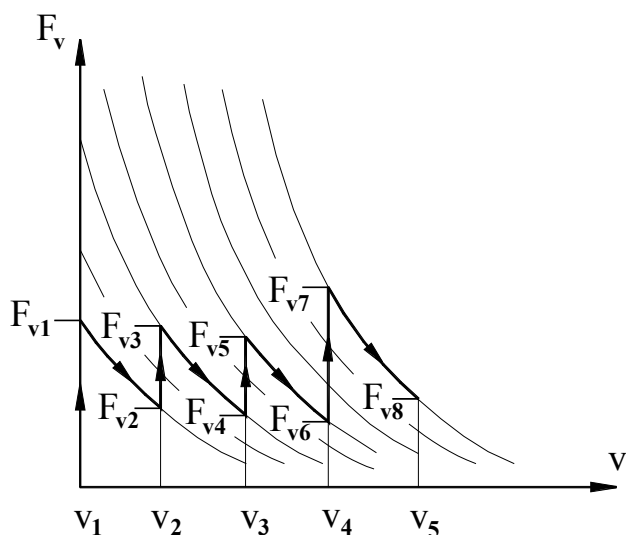
b/ fékezés esete:  $-F_f - F_e = m_v \cdot a_f(t)$ ; ahol a gyorsulás  $a_f(t) < 0$  (tehát lassulás).

Az  $F_v$  vonóerőt általában a haladási sebesség függvényében adják meg  $F_v = f(v)$  alakban, de grafikus alakban, a fékpedi, vagy vonali mérések eredményeire illesztett, hiperbola-alakú görbék formájában. A vontatójármű vezérlése által megvalósított minden egyes, állandóan kifejthető részteljesítményre külön-külön vonóerő-sebesség görbét adnak meg (2.25 ábra), hasonlóan a 2.19 ábrához:



2.25 ábra

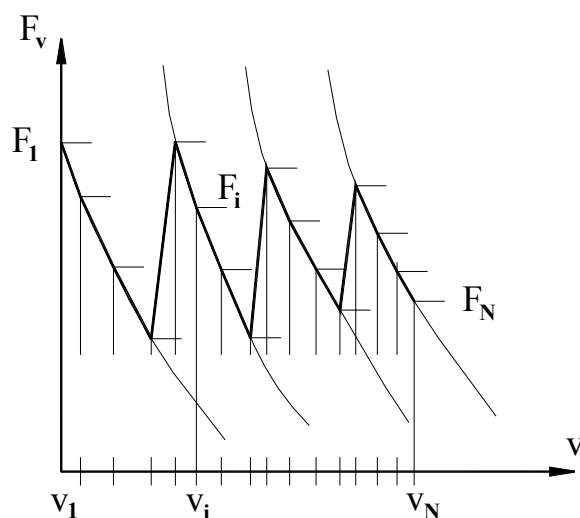
Az ábrán  $N_p$  darab részteljesítmény-értékhez van vonóerőgörbe feltüntetve. Mivel a görbéket leíró algebrai függvény nem ismert, az  $P_{rész,i}$  részteljesítményhez tartozó görbéket elegendően sok  $(v, F_v)$  koordinátapárral adhatjuk meg, amelyeket olyan sűrűn célszerű felvenni, hogy a szomszédos pontokra fektetett egyenesszakasz elhanyagolható mértékben térjen el a grafikus alakban közölt görbétől. Ahogyan a járművezető a felgyorsítás folyamán fokozatosan növeli a gépezet teljesítményét (a 2.19 ábrán bemutatott módhoz hasonlóan), megadhatunk sorban olyan  $N_F$  darab  $(v, F_v)$  értékpárt, amelyeken végigmenve gyorsítja fel a járművezető a járművet, illetve a vonatot. Tegyük fel, hogy a 2.25 ábrán bemutatott vonóerő görbesereg egyes vonóerő-görbéin az alábbi módon halad végig a járművezető a felgyorsítás folyamán (2.26 ábra):



2.26 ábra

Így az alkalmazott  $(v, F_v)$  értékpárok a következők:  $(v_1, F_{v1}), (v_2, F_{v2}), (v_2, F_{v3}), (v_3, F_{v4}), (v_3, F_{v5}), (v_4, F_{v6}), (v_4, F_{v7}), (v_5, F_{v8})$  lesznek; általános alakban:  $[(v_i, F_{vi}), i = 1, \dots, N_F]$ .

Ezt a részteljesítmény-átkapcsolási rendet természetesen más sebességeken, más részteljesítmény-fokokozatok felhasználásával is meg lehet valósítani, így az egyes járművezetők vezetési stílusát is modellezni lehet (pl. az egyik finom fokozatokban gyorsít, a másik nagyobb, durvább lépésekkel). Meg kell még azt is jegyezni, hogy itt az egyszerűség kedvéért ugrásszerű teljesítmény-átkapcsolást ( $v_2, v_3$  és  $v_4$  sebességeknél) tételeztünk fel. A valóságban a vezérlési rendszertől függően folytonos, az időtől és a sebességtől is függő  $F_v(t, v)$  görbével történik meg a teljesítmény-fokokozatok váltása, ezt is lehet modellezni, ha ismerjük a vezérlési rendszer működését. Továbbá egy meghatározott részteljesítményhez tartozó  $F_v(v)$  görbén nemcsak a két végpontot szokták felvenni  $(v_i, F_i)$  pontként, hanem közöttük is annyit, hogy két szomszédos pontra illesztett egyenesnek a mért  $F_v(v)$  görbétől való eltérése minél kisebb legyen. Általános esetben a 2.26 ábrán látható felgyorsítást a 2.27 ábrán bemutatott pontsorhoz hasonló módon modellezzük:



2.27 ábra

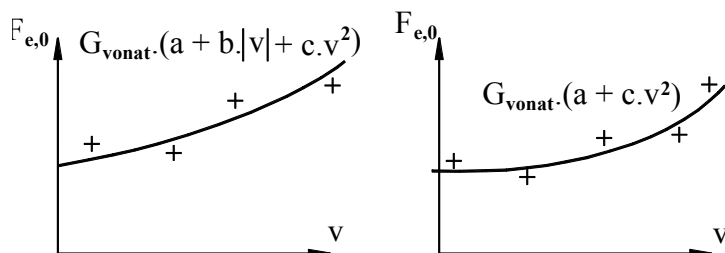
Az  $F_e$  menetellenálláserő két összetevőből áll: az  $F_{e,0}$  alapellenálláserőből és az  $F_{e,p}$  pályáellenálláserőből:

$$F_e = F_{e,0} + F_{e,p}$$

ahol az  $F_{e,0}$  alapellenálláserő függvényét szintén a mért számértékekre illesztett függvénygörbével adják meg, amely a szokás szerint másodfokú polinóm:

$$F_{e,0} = G_{\text{vonat}} \cdot (a + b \cdot |v| + c \cdot v^2), \text{ illetve } F_{e,0} = G_{\text{vonat}} \cdot (a + c \cdot v^2) \quad (2.27 \text{ ábra}):$$

A kétféle képletnek az az oka, hogy mivel mért pontokra történő görbeillesztésről van szó, az adott mérési  $(v, F_e)$  pontpár-halmazra vagy a lineáris tagot is tartalmazó képlet, vagy a lineáris tagot nem tartalmazó képlet ad jobb közelítést a mérési pontokra. Így ez bizonyos mértékig a mérésnek is függvénye.



2.28 ábra

A képletekben  $G_{\text{vonat}}^{\text{kN}}$  a vonat, vagy a jármű súlya **kN**-ban. A görbeillesztést úgy hajtják végre, hogy az alkalmazott **a**, **b** és **c** együtthatókkal az  $F_{e,0}$  alapellenállási erő értékét **N**-ban kapják meg, ha a sebességet **km/h**-ban helyettesítjük be. A vonat súlya helyett az egyes kocsik súlyát külön-külön is figyelembe vehetjük, ez főleg akkor célszerű, ha az egyes kocsiknak más és más az alapellenállási képletben az **a**, **b** és **c** együtthatói. Szokás, hogy az ellenállási erőknek a fajlagos **w** értékét alkalmazzák, ezzel az alapellenállási erő:

$$F_{e,0}^N = G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot (a + b \cdot |v| + c \cdot v^2) = G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot w_{e,0}^{N/\text{kN}}$$

A pályaellenálláserőnek is két összetevője van, az emelkedések (lejtések) által okozott előjeles  $F_{p,em}$  emelkedési ellenálláserő és a pályáívek által okozott  $F_{p,ív}$  kanyarulatú ellenállási erő:

$$F_{e,p} = F_{p,em} + F_{p,ív} = G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot w_{em}^{N/\text{kN}} + G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot w_{ív}^{N/\text{kN}}$$

A fajlagos  $w_{em}^{N/\text{kN}}$  emelkedési ellenálláserő számszerűen megegyezik az 0/00-ben kifejezett  $e^{0/00}$  lejtéssel:

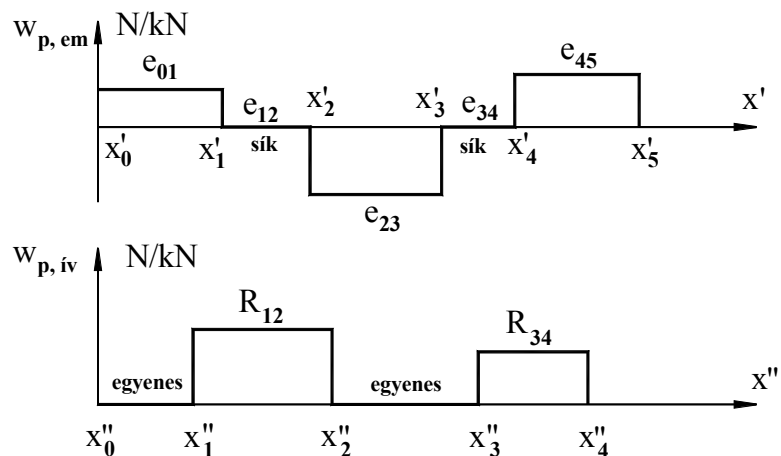
$$F_{p,em}^N = G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot w_{em}^{N/\text{kN}} = G_{\text{vonat}}^{\text{kN}} \cdot e^{0/00}$$

A fajlagos  $w_{ív}^{N/\text{kN}}$  ívellenálláserő elsősorban az **R** pályáívsugártól függ; a mérési eredményekre illesztett tapasztalati függvények közül a hazai gyakorlatban legismertebb a **Röckl**-féle képlet:

$$w(R)_{ív}^{N/\text{kN}} = \frac{650}{R^m - 55} \quad [\text{N/kN}]$$



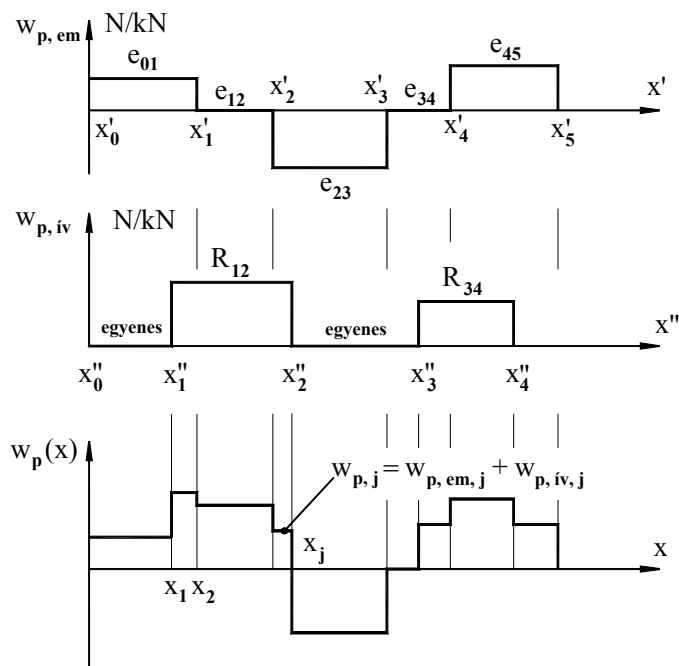
A vasúti pályát úgy építik, hogy bizonyos, a hosszszelvényben megadott pályaszakaszokon belül az emelkedés (lejtés), illetve a pályáívsugar állandó értékű, így mind a  $w_{p,em}$ , mind a  $w_{p,ív}(R)$  lépcsős függvény:



2.29 ábra

tehát az  $F_{e,p}$  pályaelenálláserő az  $x$  úthossznak is függvénye.

Mivel a pályaszakaszok hosszszelvényében az emelkedők és a pályáívek egyes pályaszakaszainak kezdő- és végpontjai sohasem egyeznek meg, a gyakorlati számításokhoz célszerű egyesíteni a hosszszelvény kétféle útszakasz-értékhalmozát úgy, hogy egy meghatározott pályaszakaszon belül az emelkedők és a pályáívek állandók legyenek (2.30 ábra).



2.30 ábra

Ekkor a menetellenállás függvénye az alábbi szerkezetű lesz:

$$\begin{aligned}
 F_e = F_e(x, v) &= \sum_{(\text{vonat})} \left[ G \cdot (a + b|v| + c \cdot v^2) \right] + G_{\text{vonat}} \cdot w_p(x) = \\
 &= \sum_{(\text{vonat})} [G \cdot a] + \sum_{(\text{vonat})} [G \cdot b|v|] + \sum_{(\text{vonat})} [G \cdot c \cdot v^2] + G_{\text{vonat}} \cdot w_p(x) =
 \end{aligned}$$

$$= A + B(x) + C(v) + D(v^2)$$

ahol  $A$  az alapellenálláserő állandó tagja,  $B(x)$  tartalmazza a pályaelenálláserőt,  $C(v)$  és  $D(v^2)$  az alapellenálláserő lineáris és másodfokú tagját jelenti. Itt is emlékeztetünk arra, hogy az „egész vonatra” történő összegzés azt jelenti, hogy a vonatot alkotó különböző típusú kocsik alapellenálláserejét összegezzük, akár minden egyes kocsira.

Végül ne felejtsük meg arról sem, hogy a jármű (vonat)  $m_v$  tömege is változhat az  $x$  megtett út függvényében, amint azt a 2.5.2 fejezetben a 2.21 ábrán már bemutattuk, az utaslét-szám, vagy az áruteher változásának érzékeltetésére, tehát

$$m_v(x) = m_{v,k}; \text{ ha } x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

Végeredményben ha az  $F_e$  menetellenálláserő függvényét az egyesített  $w_p(x)$  fajlagos pályaelenállási tényezővel írjuk fel, továbbá feltüntetjük az  $m(x)$  vonattömegnek a lehetséges változását is az  $x$  út függvényében, a képlet a következő alakú lesz:

$$F_e = F_{e,0} + F_{e,p} = m(x) \cdot g \cdot w_0(v) + m(x) \cdot g \cdot w_p(x);$$

nem felejtsük meg arról, hogy szükség esetén összegezni kell a különböző járműtípusok alapellenálláserejét. Ebben a képletben  $w_0(v)$  függvénye algebrai képlet alakjában áll rendelkezésre,  $w_p(x)$  függvénye viszont szakaszonként állandó érték.

Most már rátérhetünk a mozgásegyenlet megoldására. A felgyorsítás (illetve sebességtartás) esetében a vonatra az  $F_v$  vonóerő és az  $F_e$  menetellenálláserő hat, így a mozgásegyenlet:

$$F_v - F_e = m_v \cdot a_g(t);$$

behelyettesítve: 
$$F_v(v) - m_v(x) \cdot g \cdot w_0(v) - m_v(x) \cdot g \cdot w_p(x) = m_v(x) \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Kifejezve a legmagasabb (a második) deriváltat:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_v(v)}{m_v(x)} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_p(x)$$

A mozgásegyenlet jobboldalának az az érdekessége, hogy az  $F_v(v)$  és  $w_0(v)$  mennyiségek a járműsebességnek folytonos függvényei. Ezek közül az  $w_0(v)$  függvényt akár algebrai függvény alakjában lehet használni és abba  $v$  behelyettesítésével a függvényértéket megkapni, akár egyenes szakaszokkal is lehet közelíteni és a lineáris függvénybe kell a sebességet behelyettesíteni. A vonóerő  $F_v(v)$  függvénye csak a ráfektetett egyenes szakaszokkal használható. Az  $m_v(x)$  és  $w_p(x)$  mennyiségek viszont olyan lépcsős függvények, amelyek állandó értékűek egy-egy meghatározott  $x_i - x_{i+1}$  pályaszakaszon belül. Ez azt jelenti, hogy egy ilyen  $x_i - x_{i+1}$  pályaszakaszon belül az  $m_v(x)$  és  $w_p(x)$  mennyiségek állandó értékűek. A mozgásegyenletet úgy oldhatjuk meg, hogy behelyettesítjük ezt az állandó értéket és a megoldás során ellenőrizzük a modell szimulált megtett  $x$  útját, és ha elértük a kérdéses pályaszakasz határát, új  $m_v(x)$ , illetve  $w_p(x)$  mennyiséget kell meghatározni és ezen új számértékekkel folytatni a mozgásegyenlet megoldását. Numerikus megoldási módot alkalmazva ennek nincs akadálya.

Ez a tény viszont lehetőséget ad zárt alakú megoldás meghatározására is, tehát olyanra, amely nem diszkrét számértékek sorát határozza meg megoldásként, hanem megadja a megoldás algebrai függvényét. Ugyanis ha az  $m_v(x)$  és  $w_p(x)$  mennyiségek állandó értékűek egy bizonyos  $x_i - x_{i+1}$  pályaszakaszon belül, akkor a mozgásegyenlet a következő alakba is írható:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F_v(v)}{m_{v,i}} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_{p,j} ;$$

ahol  $m_{v,i}$  = állandó, ha  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ , valamint  $w_{p,j}$  = állandó, ha  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$ . Így a mozgásegyenlet olyan elsőrendű differenciálegyenlet lett, amelyben – ha az  $F_v(v)$  és  $w_0(v)$  mennyiségeket egyenes szakaszokkal (tehát lineáris függvényekkel) közelítjük, elsőrendű, állandó együtthatós, lineáris, inhomogén differenciálegyenletet kapunk, amely zárt alakban megoldható. Az alábbiakban mindkét megoldási módot vázoljuk.

### 2.6.2.1 A mozgásegyenletek megoldása numerikus módszerrel

A differenciálegyenletek numerikus megoldási módszereit bővebben a 2.7 fejezetben tárgyaljuk, itt röviden csak annyit említünk meg, hogy az elterjedten használt numerikus módszerek diszkrét  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots, t_N$  időértékekhez (független változó-értékekhez) diszkrét  $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_N$ , valamint  $v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_N$  függvényértékeket határoznak meg. A mozgásegyenlet másodrendű alakjából kell kiindulnunk (az előbb levezetett elsőrendű differenciálegyenletre alkalmazva a numerikus megoldást, nem kapjuk meg a megtett útra az  $x_1, \dots, x_i, \dots, x_N$  függvényérték-sort!). A programkönyvtári programok algoritmusai gyakorlatilag kivétel nélkül elsőrendű differenciálegyenletekre vannak kidolgozva, ezért a másodrendű differenciálegyenletet át kell alakítanunk elsőrendű egyenletekké megfelelő új változó bevezetésével:

az eredeti egyenlet: 
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F_v(v)}{m_v(x)} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_p(x)$$

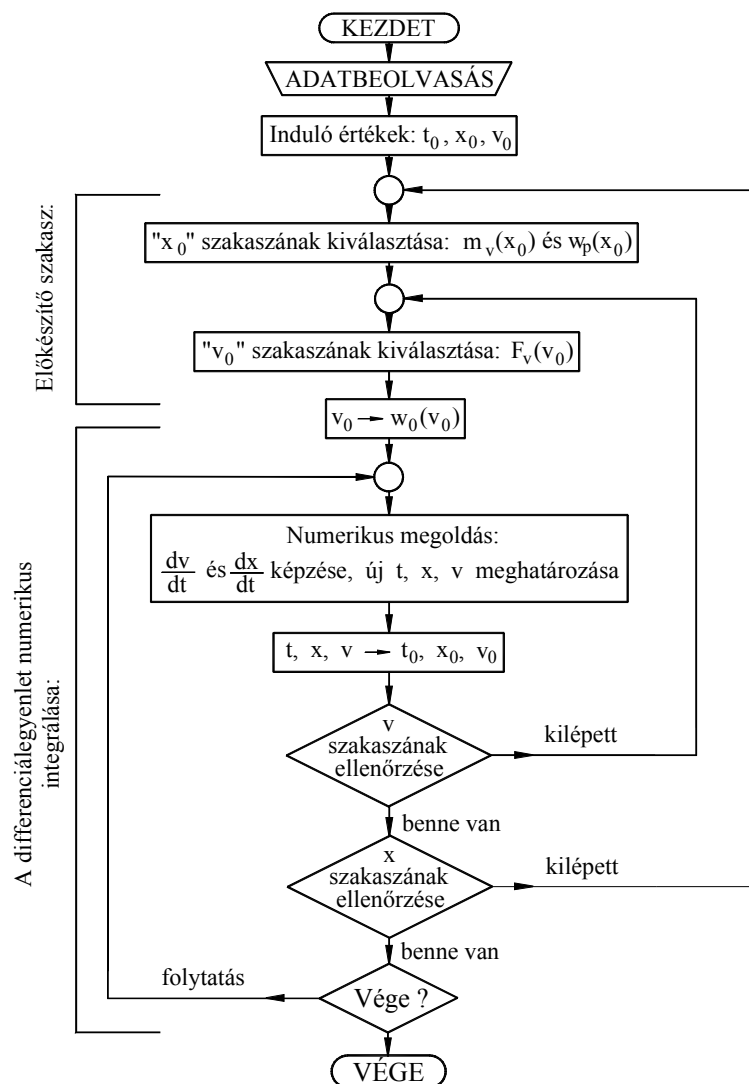
Legyen az új változó a sebesség:  $\frac{dx}{dt} = v$ ; ezzel a gyorsulás:  $a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$  ;

így a két elsőrendű differenciálegyenlet:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F_v(v)}{m_v(x)} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_p(x) ;$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

Mivel a könyvtári programok általában szubrutin-alakban állnak rendelkezésre, ezért egy alkalmas keret-programot kell összeállítani, amely végrehajtja az adatbeolvasást és behívja a differenciálegyenletrendszer megoldó szubrutint, valamint végrehajt minden szükséges egyéb kiegészítő számítást. Erre a keretprogramra mutat egy lehetséges megoldást a 2.31 ábrán látható folyamatábra:



2.31 ábra

A differenciálegyenlet numerikus megoldása azzal kezdődik, hogy a szükséges adatok beolvasása, valamint a  $(t_0, x_0, v_0)$  kezdeti értékek beolvasása után az „Előkészítő szakaszban” meg kell keresni, hogy egyrészt a megadott, illetve éppen érvényes  $x_0$  út a vonattömeg  $m_v(x)$  lépcsős függvényében melyik  $(x_k, x_{k+1})$  tartományba (2.31 ábra), valamint a fajlagos pályáellenállás  $w_p(x)$  lépcsős függvényének melyik  $(x_i, x_{i+1})$  tartományába (2.30 ábra) esik bele, mert így kapjuk meg az aktuális  $m_v(x_0)$  és  $w_p(x_0)$  értékeket, másrészt hogy az éppen érvényes  $v_0$  sebességhez melyik  $F_v(v_0)$  vonóerő és  $w_0(v_0)$  fajlagos alapellenálláserő tartozik. Ezt a négy számértéket behelyettesítve a  $\frac{dv}{dt}$  és  $\frac{dx}{dt}$  differenciálegyenletekbe indulhat a numerikus megoldás.

A megoldás algoritmusának központi része a megjelölt „A differenciálegyenlet numerikus megoldása” szakasz. Ebben a szakaszban az idő  $t_0$  értékét  $\Delta t$ -vel léptetve, és behelyettesítve a  $\frac{dv}{dt}$  és  $\frac{dx}{dt}$  differenciálegyenletekbe, új  $t, x, v$  értékhármast kapunk. Ezt a léptetést mindaddig folytatja a program, amíg vagy az időkorlátot el nem éri (adott idejű mozgás szimulációja), vagy a megteendő út végére nem ér (megadott úton való végigfutás szimulációja). Az idő léptetése során folyamatosan ellenőrizni kell a numerikus megoldás során elkövetett

képlethibát, a felmerülő számítási hibák ellenőrzési lehetőségeivel és a hibák csökkentési lehetőségeivel a 2.7 fejezetben részletesen is foglalkozunk.

A  $t$  idő léptetése során azonban minden lépésben ellenőrizni kell, hogy a számított  $t$ ,  $x$ ,  $v$  értékhármásban a megtett  $x$  út, vagy az elért  $v$  sebesség még az előzőkben kiválasztott  $x$ , illetve  $v$  tartományokon belül maradt-e. Ha bármelyikből kilépett, a folyamatábrán látható módon vissza kell lépni az „Előkészítő szakaszba” új  $m_v(x_0)$  tömeg és  $w_p(x_0)$  fajlagos pályaeellenállásértékek, illetve  $F_v(v_0)$  vonóerő és  $w_0(v_0)$  fajlagos alapellenállásértékek meghatározása céljából. Ezután újból kezdődhet a megoldási szakasz.

### 2.6.2.2 A mozgásegyenlet megoldása zárt alakban

A 2.6.2 fejezetben levezettük a jármű (vonat) mozgásegyenletét:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_v(v)}{m_v(x)} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_p(x)$$

ahol az  $F_v(v)$  vonóerő és a  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállásértékek a  $v$  sebesség folytonos függvénye (az  $F_v(v)$  vonóerő csak akkor, ha az egyes részteljesítmények közötti átkapcsolás is egyenes szakasszal van közelítve), míg az  $m_v(x)$  jármű (vonat) tömeg és a  $w_p(x)$  fajlagos pályaeellenállásértékek a megtett  $x$  út lépcsős függvénye, amelyek meghatározott útszakaszokon belül állandó értékűek. Amint arra már céloztunk, ez lehetőséget ad arra, hogy a mozgásegyenletben csak a  $v$  sebességet tekintsük változónak a  $t$  idő függvényében. Ekkor az  $a(t)$  gyorsulást a  $v(t)$  sebességfüggvény első deriváltjával vehetjük figyelembe:

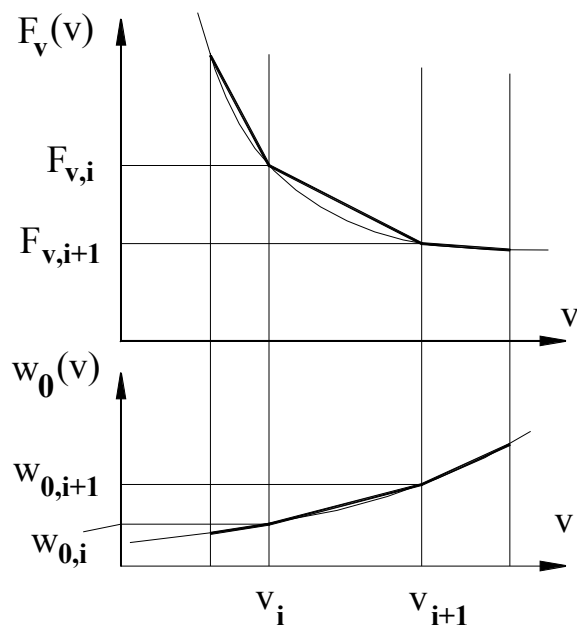
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{F_v(v)}{m_v(x)} - g \cdot w_0(v) - g \cdot w_p(x)$$

Ha most kihasználjuk, hogy az  $m_v(x)$  és a  $w_p(x)$  függvények egy-egy megadott útszakaszon belül állandó értékűek, írhatjuk:

$$\frac{dv}{dt} = A \cdot F_v(v) - g \cdot w_0(v) - B$$

ahol  $A$  és  $B$  állandók, mert  $m_v(x) = \text{áll}$ , ha a megtett  $x$  útra  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$  és  $w_p(x) = \text{áll}$ , ha a megtett  $x$  útra  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ , miután az  $m_v(x)$  járműtömeg az  $(x_j, m_{v,j})$ ,  $j = 1, \dots, N_{mv}$  értékpár-halmazzal, a  $w_p(x)$  fajlagos pályaeellenállás az  $(x_k, w_{p,k})$ ,  $k = 1, \dots, N_{wp}$  értékpár-halmazzal van megadva.

Alakítsuk át most az  $F_v(v)$  és a  $w_0(v)$  függvényt lineáris függvénné oly módon, hogy egyes szakaszokat fektetünk mind az  $F_v(v)$ , mind a  $w_0(v)$  függvénygörbére (2.32 ábra):



2.32 ábra

Itt felhasználhatjuk a vontatójárműre megadott vonóerő-jelleggörbe seregnek a 2.27 ábrán bemutatott diszkrét  $(v_i, F_{v,i})$  pontsorról végrehajtott közelítést és egyenes szakaszokkal való közelítést. A  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállás-erő függvényére úgy illeszthetünk egyeneseket, hogy egy elvileg tetszőleges  $v_1, \dots, v_j, \dots, v_{Nw}$  diszkrét sebességértékeken kiszámítjuk a járműre használt  $w_0(v)$  függvény értékeit. Viszont számítástechnikailag célszerű ugyanazt a  $v_1, \dots, v_i, \dots, v_{Nf}$  sebesség-sort alkalmazni nemcsak az  $F_v(v)$ , de a  $w_0(v)$  görbének egyenes szakaszokkal való közelítésére is.

Ekkor a  $v_i \leq v \leq v_{i+1}$  sebességintervallumra a vonóerő-görbe közelítő egyenes szakasza a hasonló háromszögekből:

$$\frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i} = \frac{F_v - F_{v,i}}{v - v_i}$$

$$\text{innen: } F_v = \frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i} \cdot (v - v_i) + F_{v,i} = v \cdot \frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i} - v_i \cdot \frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i} + F_{v,i}$$

$$\text{így: } F_v(v) = a \cdot v + b, \text{ ha } v_i \leq v \leq v_{i+1}$$

$$\text{ahol } a = \frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i} \text{ (általában negatív) és } b = F_{v,i} - v_i \cdot \frac{F_{v,i+1} - F_{v,i}}{v_{i+1} - v_i}$$

Hasonlóan a fajlagos alapellenállás-erő közelítő egyenesének képlete:

$$w_0(v) = \frac{w_{0,i+1} - w_{0,i}}{v_{i+1} - v_i} \cdot v - \frac{w_{0,i+1} - w_{0,i}}{v_{i+1} - v_i} \cdot v_i + w_{0,i} = c \cdot v + d \text{ ha } v_i \leq v \leq v_{i+1}$$

$$\text{ahol } c = \frac{w_{0,i+1} - w_{0,i}}{v_{i+1} - v_i} \text{ és } d = w_{0,i} - \frac{w_{0,i+1} - w_{0,i}}{v_{i+1} - v_i} \cdot v_i$$

Most behelyettesíthetjük a mozgásegyenletbe az  $F_v(v)$  vonóerő-görbe és a  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállás-görbe közelítő egyenesének  $F_v(v) = a \cdot v + b$  és  $w_0(v) = c \cdot v + d$  képleteit:

$$\begin{aligned}\frac{dv}{dt} &= A.F_v(v) - g.w_0(v) - B = A.(a.v + b) - g.(c.v + d) - B = \\ &= (a.A - g.c).v + (A.b - g.d - B)\end{aligned}$$

Most legyen  $C = a.A - g.c$  és  $D = A.b - g.d - B$ ; ezekkel:

$$\frac{dv}{dt} = C.v + D ;$$

illetve a szokásos módon átrendezve:

$$\frac{dv}{dt} - C.v = D$$

ahol  $C$  és  $D$  állandó számértékek egy-egy meghatározott  $v_i \leq v \leq v_{i+1}$ , illetve  $x_j \leq x \leq x_{j+1}$  és  $x_k \leq x \leq x_{k+1}$  sebesség-, illetve megtett út-intervallumon belül.

Így tehát egy elsőrendű, lineáris, állandó együtthatós, inhomogén differenciálegyenletet kaptunk, amely zárt alakban megoldható. és a keresett  $\mathbf{v}(\mathbf{t})$  görbére viszonylag egyszerű, algebrai függvényt kapunk. Mivel a differenciálegyenletben nem szerepel a megtett út  $\mathbf{x}$  változója, így a  $\mathbf{v}(\mathbf{t})$  megoldásfüggvény sem tartalmazza. A megtett út  $\mathbf{x}(\mathbf{t})$  függvényét a sebesség  $\mathbf{v}(\mathbf{t})$  függvényének integrálásával kaphatjuk meg:

$$x(t) = \int v(t).dt$$

Az inhomogén differenciálegyenletek általános megoldása két tagból áll: a homogén egyenlet általános megoldásának és az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának összegéből:

$$v(t)_{\text{ált}} = V(t)_{\text{hom,ált}} + v(t)_{\text{in hom,part}}$$

A differenciálegyenlet homogén része:

$$\frac{dv}{dt} - C.v = 0$$

Ennek a differenciálegyenletnek az általános megoldását a változók szétválasztásával kaphatjuk meg. Ekkor:

$$\text{a homogén egyenlet: } \frac{dv}{dt} - C.v = 0$$

Ebből:

$$\frac{dv}{dt} = C.v$$

Innen:

$$\frac{dv}{v} = C.dt .$$

Mivel így mindkét oldalon csak egyféle változó van, a bal- és a jobboldalt külön-külön integrálhatjuk:

$$\int \frac{1}{v}.dt = \int C.dt$$

$$\ln v = C \cdot t + K_1 \quad (\text{ahol } K_1 \text{ integrálási állandó})$$

Mindkét oldalt átírhatjuk exponenciális függvény alakúvá:

$$e^{\ln v} = v = e^{C \cdot t + K_1} = e^{C \cdot t} \cdot e^{K_1} = e^{C \cdot t} \cdot K_2$$

Így a homogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$V(t)_{\text{hom, ált}} = K_2 \cdot e^{C \cdot t}$$

ahol  $K_2$  integrálási állandó,  $C$  pedig a közelítő egyenes szakaszok adataiból számított érték.

Az inhomogén differenciálegyenlet  $\mathbf{v}(t)_{\text{inhom, part}}$  partikuláris megoldását a **Lagrange**-féle, az „**állandók variálásának**” nevezett módszerrel kaphatjuk meg, amely egyúttal az inhomogén differenciálegyenlet  $\mathbf{v}(t)_{\text{ált}}$  általános megoldást is megadja. Ekkor a  $K_2$  integrálási állandót az idő függvényének tekintjük. Így a differenciálegyenlet:

$$V(t)_{\text{hom, ált}} = K(t) \cdot e^{C \cdot t}$$

Ezt be kell helyettesíteni az inhomogén differenciálegyenletbe, amihez képezni kell az első deriváltat:

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{d}{dt} K(t) \cdot e^{C \cdot t} + K(t) \cdot C \cdot e^{C \cdot t}$$

Az inhomogén differenciálegyenlet az alábbi volt:

$$\frac{dv}{dt} - C \cdot v = D$$

Behelyettesítés után:

$$\frac{d}{dt} K(t) \cdot e^{C \cdot t} - K(t) \cdot C \cdot e^{C \cdot t} + C \cdot K(t) \cdot e^{C \cdot t} = D$$

$$\text{Innen: } \frac{d}{dt} K(t) \cdot e^{C \cdot t} = D, \text{ illetve: } \frac{d}{dt} K(t) = D \cdot e^{-C \cdot t}$$

$$\text{Így: } K(t) = \int D \cdot e^{-C \cdot t} \cdot dt = -\frac{D}{C} \cdot e^{-C \cdot t} + K_0$$

Végül az inhomogén differenciálegyenlet általános megoldása:

$$v(t)_{\text{ált}} = K(t) \cdot e^{C \cdot t} = -\frac{D}{C} \cdot e^{-C \cdot t} \cdot e^{C \cdot t} + K_0 \cdot e^{C \cdot t}$$

ahol  $K_0$  integrálási állandó, amelyet a kezdeti feltételekből kaphatunk meg. Ha  $t = t_0$ , és  $v = v_0$ , ezekkel:

$$v_0 = -\frac{D}{C} + K_0 \cdot e^{C \cdot t_0}$$

$$\text{Innen: } K_0 = \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{-C \cdot t_0}$$

Így végül a differenciálegyenlet általános megoldása:

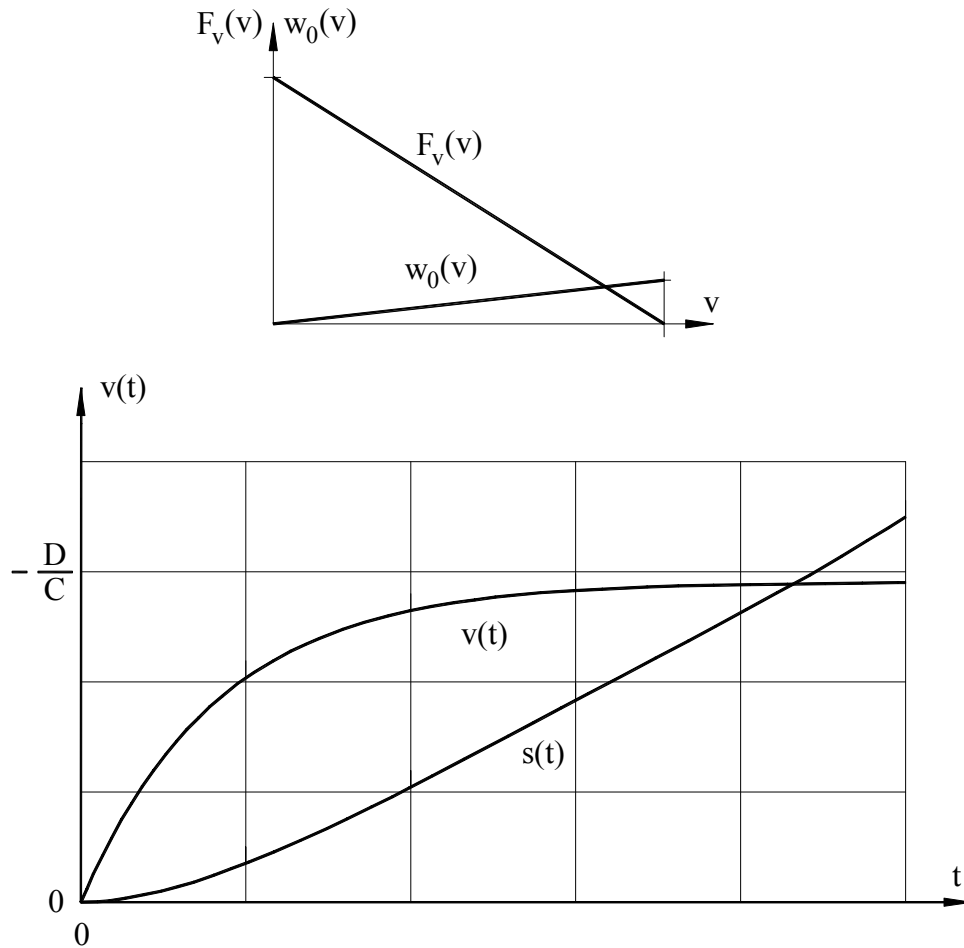


$$\begin{aligned}
 v(t)_{\text{ált}} &= -\frac{D}{C} \cdot e^{-C \cdot t} \cdot e^{C \cdot t} + K_0 \cdot e^{C \cdot t} = -\frac{D}{C} + \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{-C \cdot t_0} \cdot e^{C \cdot t} = \\
 &= -\frac{D}{C} + \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t-t_0)}
 \end{aligned}$$

Ennek a függvénynek az általános jellegét az álló helyzetből történő indításhoz tartozó megoldással mutathatjuk be, ahol  $t_0 = 0$  és  $v_0 = 0$ , valamint az  $F_v(v)$  vonóerő-görbe és a  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállásgörbe egyetlen egyenes szakasz:

$$v(t) \Big|_{t_0=0, v_0=0} = -\frac{D}{C} + \frac{D}{C} \cdot e^{C \cdot t}$$

Az  $F_v(v)$  vonóerő-görbét és a  $w_0(v)$  fajlagos alapellenállásgörbét, valamint a hozzájuk tartozó  $v(t) \Big|_{t_0=0, v_0=0}$  megoldásfüggvényt pedig a 2.33 ábra mutatja be:



2.33 ábra

A megtett út  $s(t)$  görbéjének függvényét a  $v(t)$  függvény integrálásával kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned}
 s(t) &= \int v(t) \cdot dt = \int \left\{ -\frac{D}{C} + \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t-t_0)} \right\} \cdot dt = \int -\frac{D}{C} \cdot dt + \int \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t-t_0)} \cdot dt = \\
 &= -\frac{D}{C} \cdot t + \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t-t_0)} + K_s
 \end{aligned}$$

Itt  $K_s$  integrálási állandó, amelyet a kezdeti feltételekből kaphatunk meg: ha  $t = t_0$ , és  $s = s_0$ , ezekkel:

$$s_0 = -\frac{D}{C} \cdot t_0 + \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t_0 - t_0)} + K_s = -\frac{D}{C} \cdot t_0 + \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] + K_s$$

Innen  $K_s$  kifejezve:

$$K_s = s_0 + \frac{D}{C} \cdot t_0 - \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right]$$

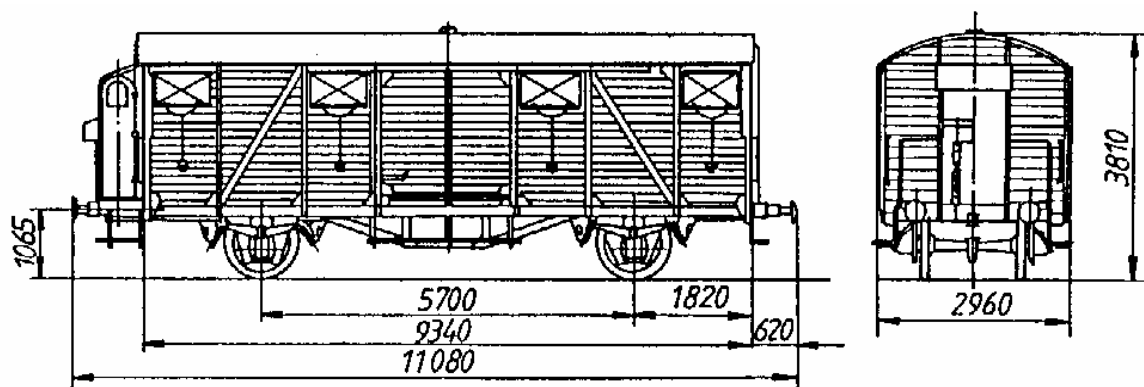
Behelyettesítve:

$$\begin{aligned} s(t) &= -\frac{D}{C} \cdot t + \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot e^{C \cdot (t - t_0)} + s_0 + \frac{D}{C} \cdot t_0 - \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] = \\ &= s_0 - \frac{D}{C} \cdot (t - t_0) - \frac{1}{C} \cdot \left[ v_0 + \frac{D}{C} \right] \cdot \left[ 1 - e^{C \cdot (t - t_0)} \right] \end{aligned}$$

A megtett út  $s(t)$  görbéjének általános jellegét a  $v(t)$  görbéhez hasonlóan az álló helyzetből végrehajtott indítás esetére mutatjuk be, ugyancsak a 2.33 ábrán.

### 2.6.3 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott függőleges pályahibákon való végigfutásának szimulálására (lineáris változat)

A dinamikai modellt egy Gbgs sorozatú fedett, kéttengelyes teherkocsi mozgásának szimulációjához építjük fel. A kocsi jellegrajzát a 2.41 ábra mutatja be. A modell segítségével szimulálhatjuk a jármű végigfutását megadott függőleges pályahibákon.



2.41 ábra

A dinamikai modell magában foglalja egyrészt a teherkocsit, másrészt a pályát is, mivel a járműmozgás szimulációjában nem célszerű szétválasztani a járművet és a környezetét, vagyis a pályát. A pálya tömegét közelítő, egyenértékű pályatömeggel, a pálya függőleges rugalmasságát és energiaelnyelő képességét a tömeget és az alépítményt összekapcsoló egyenértékű rugómerevséggel és csillapítási együtthatóval vesszük figyelembe. A függőleges pályahibákat a regisztrált pályahiba-út görbével vesszük figyelembe mind a jobb, mind a bal sínszál esetében, mintha az egyenértékű rugónak és csillapítónak a pályatömeggel szemközti pontja függőleges helyzetét adnák meg. Feltételezzük, hogy a végiggördülő jármű kerékpárjainak mozgó terhelése nem befolyásolja számottevően a mért pályahiba-görbéket.

Vegyük sorra a következőkben a vizsgált jármű dinamikai modellje felépítésének egyes lépéseit.

#### 1. lépés: a modellezendő jármű megválasztása.

A Gbgs sorozatú fedett teherkocsit azért választottuk ki, hogy a dinamikai modell viszonylag egyszerű és kisméretű legyen, mert így a Segédlet keretébe viszonylag egyszerűen belefér.

#### 2. lépés: a modell tömegelemeinek meghatározása

A modell tömegelemeinek meghatározásában azt az alapelvet használjuk fel, hogy a kiválasztott tömegelemet merev, diszkrét tömegnek lehessen tekinteni, tehát a tömegelem deformációja (pl. a kocsiszekrény függőleges behajlása) elhanyagolható legyen a tömeg elmozdulá-

sához képest (pl. a kocsiszekrény függőleges lengése). Ezért a modellünk tömegelemei a következők lesznek:

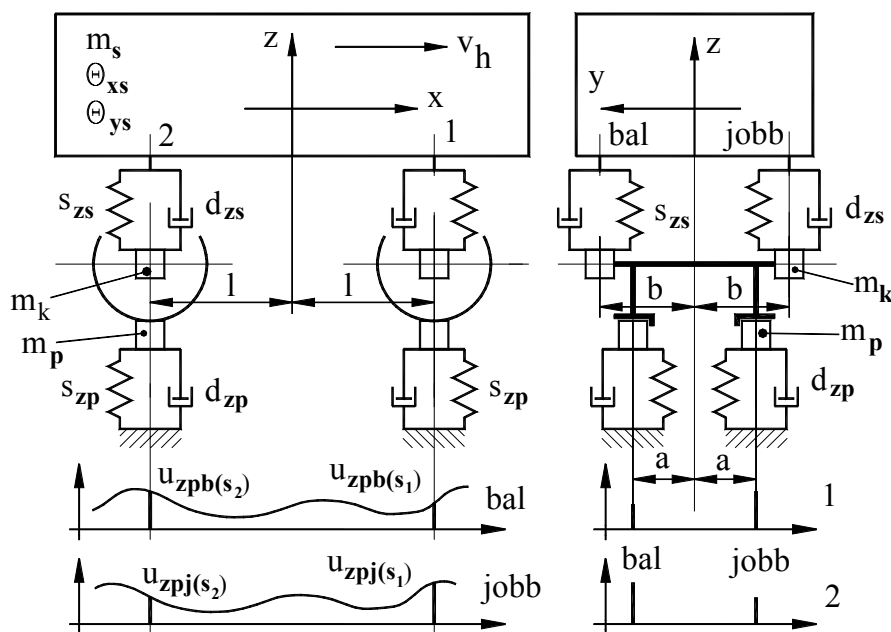
a/ kocsiszekrény: a valóságos szekrényvel azonos főméretű és tömegű, homogén tömegeloszlású téglatest, amely a szekrényen kívül tartalmazza a rugózásnak a szekrényhez kapcsolódó elemeit, valamint a laprugók tömegének egyharmad részét. A szükséges tehetetlenségi nyomaték-értékeket a tömegből és a főméretekből határozzuk meg;

b/ kerékpár (menetirány szerint első): az eredeti kerékpárhoz hasonló, de egyszerűsített alakú forgástest, az eredeti kerékpárral megegyező tömeggel és tehetetlenségi nyomatékokkal, tartalmazza még a rugóbekötéseknek a csapágytökhöz kapcsolódó elemeit, valamint a laprugók tömegének egyharmadát;

c/ kerékpár (menetirány szerint második): az eredeti kerékpárhoz hasonló, de egyszerűsített alakú forgástest, az eredeti kerékpárral megegyező tömeggel és tehetetlenségi nyomatékokkal, tartalmazza még a rugóbekötéseknek a csapágytökhöz kapcsolódó elemeit, valamint a laprugók tömegének egyharmadát.

d/ egyenértékű pályatömegek (mindegyik kerék alatt): értéküket a szakirodalomban található ajánlások alapján vehetjük fel.

A 2.42 ábra vázlatosan mutatja be a dinamikai modell tömegeit, valamint rugalmas és disszipációs elemeit.



2.42 ábra

### 3. lépés: a modell tömegelemeinek szabadságfoka, a figyelembe vett mozgások

Mindenekelőtt a koordináta-rendszert kell felvenni, hogy az egyes mozgásfajták iránya és értelme, stb. rögzíthető legyen. Az  $x$  tengelyt rendszerint a  $v_h$  haladási sebesség irányában szokták felvenni, a  $z$  tengely függőleges irányú, az  $y$  tengely pedig balra vízszintesen van felvéve, hogy a koordináta-rendszer jobbsodrású legyen.

Minden tömegelemnek legfeljebb hat szabadságfoka van: az  $x$ -,  $y$ - és  $z$ -irányú elmozdulás ( $u_x$ ,  $u_y$  és  $u_z$ ), valamint az ugyanezen tengelyek körüli szögelfordulások ( $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  és  $\varphi_z$ ). Mivel a vizsgált járműnek a mért függőleges pályaprofilon való végighaladását kívánjuk szimulálni,

ezért a pálya és a kerekek, illetve a kerekek és a kocsiszekrény között ébredő függőleges erőket kell meghatározni, amelyekhez a hozzájuk tartozó függőleges relatív elmozdulások meghatározása szükséges. Ezek segítségével lehet felírni az egyes tömegelemekre a mozgásegyenleteket.

Az egyes tömegelemek szabadságfokaihoz a tömegközéppontok  $x$ -,  $y$ - és  $z$ -irányú elmozdulásait, valamint a tömegközéppontokon átmenő  $x$ -,  $y$ - és  $z$ -tengelyek körüli szögelfordulásokat kapcsoljuk. Így a mozgásegyenletekben az említett irányú elmozdulások, sebességek és gyorsulások, illetve e tengelyek körüli szögelfordulások, szögsebességek és szöggyorsulások lesznek a változók, ezek könnyebb megkülönböztethetősége érdekében az alábbi jelölési és indexelési rendszert alkalmazzuk:

Változók:

- elmozdulások:  $\mathbf{u}$
- szögelfordulások:  $\varphi$
- sebességek:  $\mathbf{v}$
- szögsebességek:  $\boldsymbol{\omega}$
- gyorsulások:  $\mathbf{a}$
- szöggyorsulások:  $\boldsymbol{\varepsilon}$

Mivel a tömegelemek közötti kapcsolati erők meghatározásához nem a tömegek középpontjához tartozó mozgásjellemzőket, hanem a kapcsolati pontok elmozdulásait és sebességeit, ezért e pontok mozgásjellemzőinek jelölésére a jobb áttekinthetőség érdekében az alábbi indexelési rendszert alkalmazzuk:

Az **első index** az elmozdulások, szögelfordulások, stb. irányát jelzi, tehát pl.  $\mathbf{u}_z$  függőleges elmozdulást,  $\varphi_x$   $x$ -tengely körüli szögelfordulást jelent.

A **második index** utal a megfelelő tömegelemre: „ $s$ ” a szekrény, „ $k$ ” a kerékpár, „ $p$ ” a pálya. Így pl.  $\mathbf{u}_{zs}$  a kocsiszekrény függőleges elmozdulása,  $\boldsymbol{\omega}_{xk}$  az egyik kerékpár  $x$ -körüli szögsebessége.

A **harmadik index** a kerékpárok sorszámát jelöli: a menetirány szerinti az első. Így pl.  $\varphi_{xk1}$  az 1. kerékpár  $x$ -körüli szögelfordulását,  $\mathbf{a}_{zk2}$  a 2. kerékpár  $z$ -irányú gyorsulását jelenti.

A **negyedik index** segítségével a menetirányba nézve bal- és jobboldali jellemzőket különböztethetjük meg. Így pl.  $\mathbf{u}_{zs1b}$  a kocsiszekrénynek az 1. kerékpárral kapcsolódó baloldali pontjában (a hordrugó névleges bekötési pontjában) a kocsiszekrény elmozdulását jelenti. Kiegészítésül a kerékpárokon belül a kerék és a pálya érintkezési pontjának jellemzőit egy ötödik indexszel jelöljük. Így például  $\mathbf{u}_{zk1ba}$  az 1. kerékpár baloldali érintkezési pontjának függőleges elmozdulását jelöli.

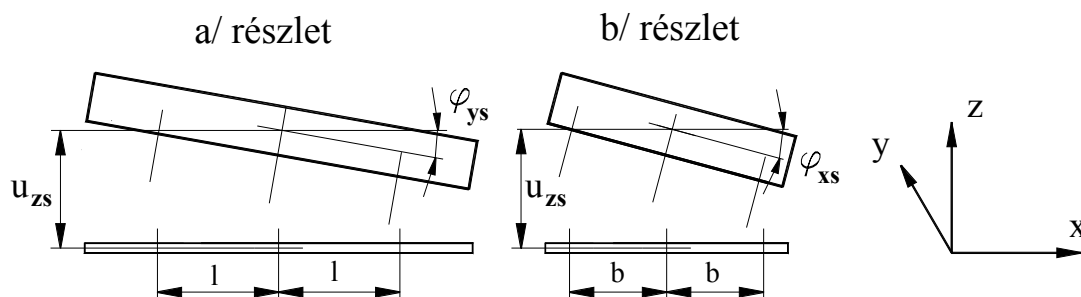
Ezek után az egyes tömegelemek figyelembe vett szabadságfokai a következők:

**a/ kocsiszekrény:**

- függőleges  $z$ -irányú elmozdulás:  $\mathbf{u}_{zs}$
- $x$ -tengely körüli távolgás:  $\varphi_{xs}$
- $y$ -tengely körüli bólintás:  $\varphi_{ys}$

Első közelítésben hanyagoljuk el a kocsiszekrény tömegközéppontjának a rugóbekötési pontok síkjától mért magasságát, és tekintjük a kocsiszekrényt olyan egyenletes

tömegeloszlású síklemezek, amelynek van az x-tengely körül  $\Theta_{xs}$ , valamint az y-tengely körül  $\Theta_{ys}$  tehetetlenségi nyomatéka. Ekkor a kocsiszekrény térbeli kimozdult helyzetét – pozitív elmozdulásokat feltételezve – a 2.43 ábra szemlélteti. Az ábr **a/** része a jármű előlnézetét (y irányában nézve), a **b/** része az oldalnézetet (x irányában nézve) mutatja be :



2.43 ábra

**b/ 1. kerékpár:**

A tömegelemek felsorolásánál megemlítettük, hogy a pályát olyan egyenértékű  $m_p$  tömeggel vesszük figyelembe, amely mindig érintkezve kapcsolódik a kerékhez, attól el nem válik. A jármű mozgásának szimulációjában nem vesszük figyelembe se a kerékabroncs rugalmasságát, se azt, hogy a futófelület esetleges sérülése megzavarhatja a kerék és a sín gördülő érintkezését. Így a bal- és jobboldali pálya helyettesítő egyenértékű  $m_p$  tömegeit egyszerűen hozzáadhatjuk a kerékpár eredeti  $m_k$  tömegéhez, így kapjuk a kerékpár kiegészített  $m_{kp}$  tömegét, a kerékpár eredeti  $\Theta_{xk}$  tehetetlenségi nyomatékához pedig a két  $m_p$  tömegnek az „a” karral számított tehetetlenségi nyomatékát adjuk hozzá, ez lesz a kiegészített  $\Theta_{xkp}$  tehetetlenségi nyomaték:

$$m_{kp} = m_k + 2 \cdot m_p$$

$$\Theta_{xkp} = \Theta_{xk} + 2 \cdot a^2 \cdot m_p$$

Így a pályatömegeknek nem lesz külön szabadságfoka. A gördülő mozgás miatt az y-körüli bólintás vizsgálatának nincs értelme, így a kerékpár szabadságfokai:

függőleges z-irányú elmozdulás:  $u_{zk1}$

x-körüli támoalgás:  $\varphi_{xk1}$

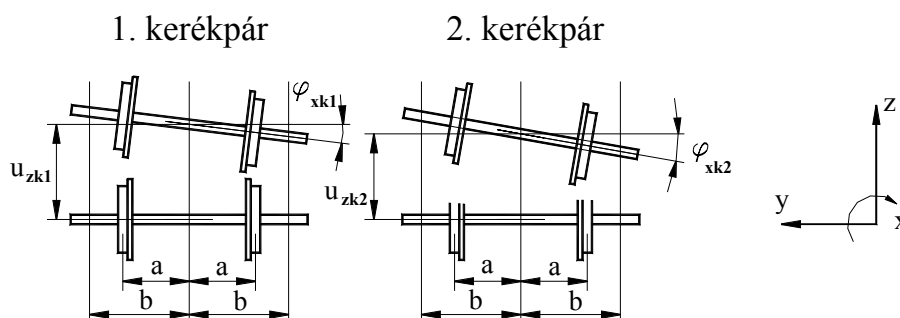
**c/ 2. kerékpár:**

A kerékpár tömegét és tehetetlenségi nyomatékát az 1. kerékpárhoz hasonlóan egészítjük ki. Így a szabadságfokok:

függőleges z-irányú elmozdulás:  $u_{zk2}$

x-körüli támoalgás:  $\varphi_{xk2}$

A két kerékpár kimozdult helyzetét a 2.44 ábrán láthatjuk:



2.44 ábra

A szabadságfokokhoz tartozó koordinátákat az  $y$  koordinátavektorba foglalhatjuk össze:

$$\underline{y} = [u_{zs}, \varphi_{xs}, \varphi_{ys}, u_{zk1}, \varphi_{xk1}, u_{zk2}, \varphi_{xk2}]^T$$

Az  $\underline{y}$  koordinátavektor összetevői az egyes szabadságfokok; ezek statikus mennyiségek, mert azok változásának sem a jellegére, sem azok mértékére nem adnak felvilágosítást. Erre az  $\underline{y}$  koordinátavektor idő szerinti első deriváltja alkalmas:

$$\frac{d}{dt} \underline{y} = \underline{\dot{y}} = [v_{zs}, \omega_{xs}, \omega_{ys}, v_{zk1}, \omega_{xk1}, v_{zk2}, \omega_{xk2}]^T$$

A gyakorlati számítások céljára célszerű az  $\underline{y}$  és  $\underline{\dot{y}}$  vektorokat egy **hipervektorba** összefoglalni, ez az **állapotvektor** :

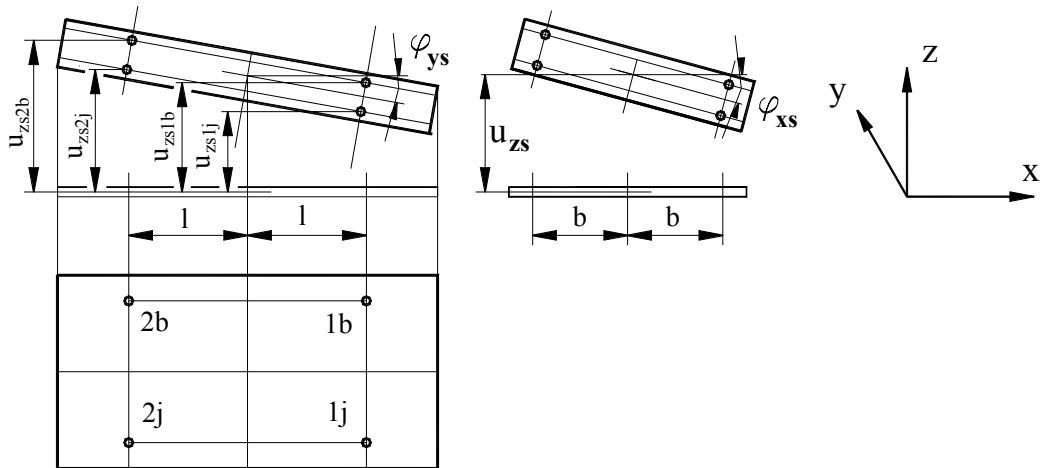
$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{y}} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = [v_{zs}, \omega_{xs}, \omega_{ys}, v_{zk1}, \omega_{xk1}, v_{zk2}, \omega_{xk2}, u_{zs}, \varphi_{xs}, \varphi_{ys}, u_{zk1}, \varphi_{xk1}, u_{zk2}, \varphi_{xk2}]^T$$

#### 4. lépés: a tömegelemek kapcsolati pontjainak elmozdulásai és sebességei.

A tömegelemek mozgásegyenleteinek felírásához a tömegeket összekötő erőkre (az ú. n. **kapcsolati erőkre**) van szükségünk. Ezek a rugalmas elemek (rugók) deformáció erőiből, és a disszipatív elemek (lengéscsillapítók) csillapító erőiből tevődnek össze. Ezek meghatározásához minden egyes tömegelem esetében meg kell határozni a kapcsoló pontok elmozdulását és sebességét a tömegelemek szabadságfokai, valamint ezek idő szerinti első deriváltjainak függvényében, tehát az állapotvektor összetevőinek függvényében.

##### a/ a kocsiszekrény kapcsolati pontjai:

A négy kapcsolati pont (a 2.45 ábrán felülnézetben) az **1b**, **1j**, **2b** és **2j**.



2.45 ábra

A kocsiszekrény tömegközéppontjának  $u_{zs}$  elmozdulását és  $v_{zs}$  sebességét mindegyik kapcsolati pont elmozdulása és sebessége tartalmazza. Az  $x$  és  $y$  tengelyek körüli  $\varphi_{xs}$  és  $\varphi_{ys}$  szögelfordulásokból, illetve  $\omega_{xs}$  és  $\omega_{ys}$  szögsebességekből eredő összetevők számításánál kihasználjuk azt, hogy a  $\varphi_{xs}$  és  $\varphi_{ys}$  szögelfordulások annyira kicsik, hogy ezekre a szögekre érvényesek az alábbi közelítések:

$$\sin \varphi_{xs} \cong \varphi_{xs} \quad \text{és} \quad \cos \varphi_{xs} \cong 1,0 \quad ; \quad \text{illetve:}$$

$$\sin \varphi_{ys} \cong \varphi_{ys} \quad \text{és} \quad \cos \varphi_{ys} \cong 1,0$$

Ezek felhasználásával a négy kapcsolati pont elmozdulása és sebessége a következők:

$$u_{zs1b} = u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l$$

$$u_{zs1j} = u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l$$

$$u_{zs2b} = u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l$$

$$u_{zs2j} = u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l$$

$$v_{zs1b} = v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l$$

$$v_{zs1j} = v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l$$

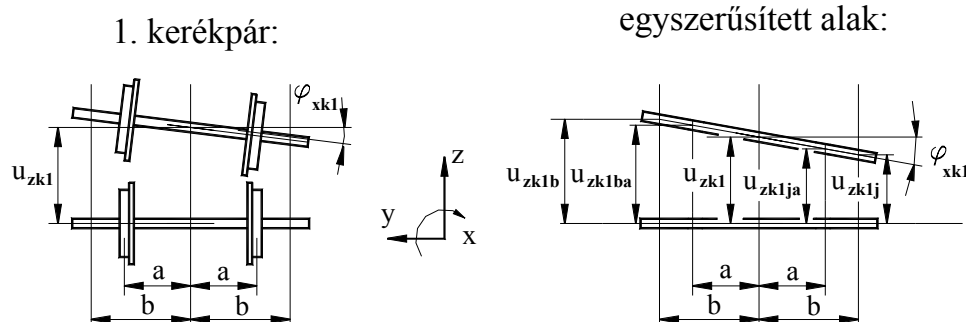
$$v_{zs2b} = v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l$$

$$v_{zs2j} = v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l$$

#### **b/ az 1. kerékpár kapcsolati pontjai:**

A négy kapcsolati pont: a hordrugók kapcsolódási pontjai (**1b** és **1a**), továbbá a kerék-sín érintkezési pontjai (**1ba** és **1ja**) a 2.46 ábrán látható elrendezésben láthatók. A kis elmozdulások és szögelfordulások következtében a kapcsolati pontok elmozdulásainak meghatározásában alkalmazhatjuk az ábra jobboldalán látható egyszerűsített alakot:





2.46 ábra

A hordrugók kapcsoló pontjainak elmozdulása és sebessége:

$$u_{zk1b} = u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b$$

$$u_{zk1j} = u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot b$$

$$v_{zk1b} = v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b$$

$$v_{zk1j} = v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b$$

A kerék-pálya érintkezési pontjainak elmozdulása és sebessége:

$$u_{zk1ba} = u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot a$$

$$u_{zk1ja} = u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot a$$

$$v_{zk1ba} = v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot a$$

$$v_{zk1ja} = v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot a$$

**c/ a 2. kerékpár kapcsolati pontjai:**

A 2. kerékpár kapcsolati pontjainak elmozdulását és sebességét hasonló összefüggések írják le, mint amilyeneket a 2.46 ábrából le lehet vonni. Így ezek értelemszerűen a következők:

A hordrugók kapcsoló pontjainak elmozdulása és sebessége:

$$u_{zk2b} = u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b$$

$$u_{zk2j} = u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot b$$

$$v_{zk2b} = v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b$$

$$v_{zk2j} = v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot b$$

A kerék-pálya érintkezési pontjainak elmozdulása és sebessége:

$$u_{zk2ba} = u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot a$$

$$u_{zk2ja} = u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot a$$

$$v_{zk2ba} = v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot a$$

$$v_{zk2ja} = v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot a$$

### 5. lépés: az egyes tömegelemek kapcsolati pontjaira ható kapcsolati erők.

A tömegelemek összekapcsoló erők belső erők, egy kapcsolati pontban a két elemre ható erő egyenlő nagyságú, de ellentétes értelmű, a rugók deformáció-erejéből és a csillapító erőből tevődik össze.

#### a/ A kocsiszekrény és a hordrugók közötti erők:

$$F_{zs1b} = -s_{zs} \cdot (u_{zs1b} - u_{zk1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1b} - v_{zk1b})$$

(Mivel  $F_{zs1b}$  a a kocsiszekrényre ható rugó- és csillapító erőt jelenti, ezért a kocsiszekrény kapcsoló pontjának  $u_{zs1b}$  elmozdulása és  $v_{zs1b}$  sebessége pozitív, míg a kerékpár  $u_{zk1b}$  elmozdulása és  $v_{zk1b}$  sebessége negatív.)

$$F_{zs1j} = -s_{zs} \cdot (u_{zs1j} - u_{zk1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1j} - v_{zk1j})$$

$$F_{zs2b} = -s_{zs} \cdot (u_{zs2b} - u_{zk2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2b} - v_{zk2b})$$

$$F_{zs2j} = -s_{zs} \cdot (u_{zs2j} - u_{zk2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2j} - v_{zk2j})$$

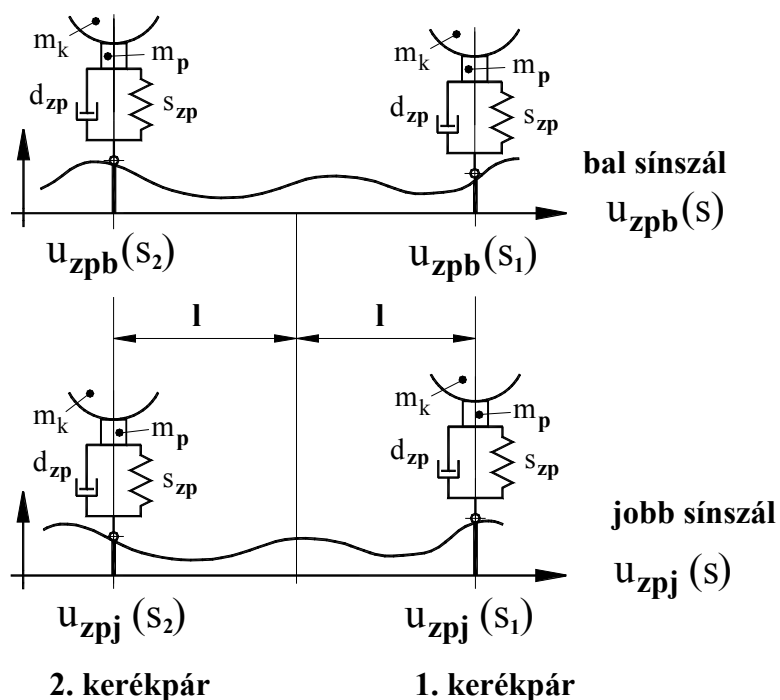
#### b/ Az 1.kerékpárra ható hordrugó- és csillapító erők:

$$F_{zk1b} = -s_{zs} \cdot (u_{zk1b} - u_{zs1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1b} - v_{zs1b})$$

$$F_{zk1j} = -s_{zs} \cdot (u_{zk1j} - u_{zs1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1j} - v_{zs1j})$$

#### c/ Az 1.kerékpárra ható pálya-erők:

A kerék-sín érintkezésnél a kerékre ható függőleges kapcsolati erők meghatározása során kell figyelembe venni a pálya regisztrált, függőleges pályaszint-hibák görbéit. Amikor a vizsgált jármű végiggördül a meghatározott rugalmasságú és disszipatív képességű pályán, deformálja a pályát, ezzel megszabva a pályadeformáció erőket. Amikor a mérőkocsi végiggördül a mérendő pályán, az is deformálja egy bizonyos mértékig a pályát, végülis a mérőkocsi nem a terheletlen pályának az elméleti vízszintes síktól mért eltéréseit regisztrálja, hanem egy bizonyos mértékig deformált pálya szinthiba-görbéit rögzítik. Mivel a mérőkocsi a terheletlen pályaalakot nem tudja regisztrálni, kénytelenek vagyunk azzal a közelítéssel élni, hogy a mérőkocsi által deformált és regisztrált pályaalakot terheletlen pályaszint-görbének tekintjük. Ekkor úgy építhetjük fel a pálya szimulációs modelljét, hogy – a 2.42 ábrán bemutatott módon – az egyenértékű pályatömeget alátámasztó  $s_{zp}$  merevségű rugónak és a  $d_{zp}$  együtthatójú csillapítónak a kerékkal szemközti végpontját a regisztrált  $u_{zp}(s)$  pályaszint-görbén végiggördülőknek tekintjük (2.47 ábra):



2.47 ábra

A bal- és jobboldali sínzálhoz természetesen külön-külön regisztrált pályaszint-görbe tartozik:  $u_{zpb}(s)$  és  $u_{zpj}(s)$ . A kerekek nem egyidőben gördülnek rá a pályahibákra, ha a haladási sebesség  $v_h$  (tételezzük fel, hogy állandó értékű), és a fél tengelytáv  $l$ , akkor a jármű tömegközéppontjának megtett útja:

$$s = v_h \cdot t = s(t) ,$$

$$\text{így az 1. kerékpár útja:} \quad s_1 = s + l = v_h(t) + l ;$$

$$\text{és a 2. kerékpár útja:} \quad s_2 = s - l = v_h \cdot t - l$$

Ekkor az egyes kerekek alatt a pályaszint-görbék aktuális értékei az alábbiak:

$$1. \text{ kerékpár, bal:} \quad u_{zpb}(s_1) = u_{zpb}(v_h \cdot t + l)$$

$$1. \text{ kerékpár, jobb:} \quad u_{zpj}(s_1) = u_{zpj}(v_h \cdot t + l)$$

$$2. \text{ kerékpár, bal:} \quad u_{zpb}(s_2) = u_{zpb}(v_h \cdot t - l)$$

$$2. \text{ kerékpár, jobb:} \quad u_{zpj}(s_2) = u_{zpj}(v_h \cdot t - l)$$

Ezek birtokában felírhatjuk az 1. kerékpár kerekeire a sínről átadódó függőleges erőket, de csak a rugalmas pályadeformációk értékét határozhatjuk meg, a pálya lengéscsillapító hatásából eredő erőt nem, mert ehhez szükség volna a pályaszint-görbén végigfutó pont sebessége függőleges összetevőjére a megtett út, illetve az idő függvényében, mivel az ébredő erő képlete:

$$F_{zk1ba} = F_{z,rugalmas} + F_{z,csillapító} = -s_{zp} \cdot [u_{zk1ba} - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot [v_{zk1ba} - v_{zpb}(s_1)]$$

ahonnan látható, hogy míg az  $F_{z,rugalmas}$  összetevő számításához rendelkezünk az  $u_{zpb}(s)$  regisztrált függvénnyel, addig az  $F_{z,csillapító}$  csillapító összetevőhöz szükség van a  $v_{zpb}(s)$  függvényre, amit deriválással kaphatnánk meg az  $u_{zpb}(s)$  függvényből:

$$v_{zpb}(s) = v_h \cdot \frac{d}{dt} u_{zpb}(v_h \cdot t)$$

viszont ezt a függvényt a pályamérőkocsik nem határozzák meg a pályaszint-görbéből. De kihasználhatjuk azt a tényt, hogy a pályaszint-görbék ordinátái általában eléggé csekélyek, továbbá a hosszmenti változásuk igen lassú, ezért élhetünk azzal a közelítéssel, hogy a pálya függőleges lengéscsillapító képletében elhanyagoljuk a  $v_{zpb}(s)$  függvényt. Ekkor az 1. kerékpár kerekeire ható függőleges pályaeerők:

$$F_{zk1ba} = F_{z,rugalmas} + F_{z,csillapító} \cong -s_{zp} \cdot [u_{zk1ba} - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ba} ;$$

$$\text{és } F_{zk1ja} \cong -s_{zp} \cdot [u_{zk1ja} - u_{zpj}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ba}$$

#### d/ A 2. kerékpárra ható hordmú- és pálya-erők:

A b/ és c/ pontokban ismertetett összefüggéseket értelemszerűen alkalmazhatjuk a 2. kerékpárra ható erők képletében, így ezek a következők lesznek:

$$F_{zk2b} = -s_{zs} \cdot (u_{zk2b} - u_{zs2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2b} - v_{zs2b})$$

$$F_{zk2j} = -s_{zs} \cdot (u_{zk2j} - u_{zs2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2j} - v_{zs2j})$$

$$F_{zk2ba} \cong -s_{zp} \cdot [u_{zk2ba} - u_{zpb}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ba} ;$$

$$\text{és } F_{zk2ja} \cong -s_{zp} \cdot [u_{zk2ja} - u_{zpj}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ba}$$

#### 6. lépés: az egyes tömegelemek mozgásegyenletei.

A modell minden elemének minden szabadságfokára fel kell írunk Newton II. törvényét.

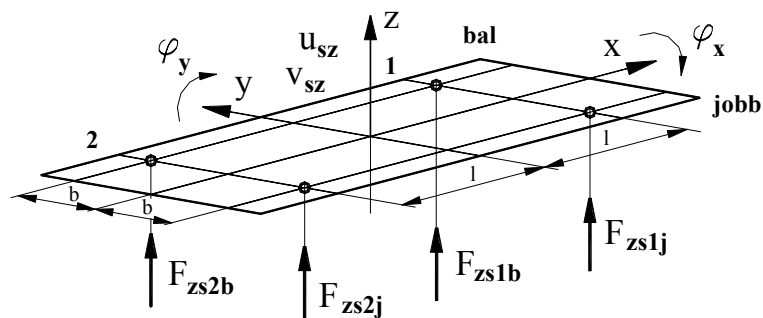
#### a/ a kocsiszekrény mozgásegyenletei:

A kocsiszekrényre ható függőleges erőket a 2.48 ábra foglalja össze:

**a/ függőleges rázás:**  $u_{zs}, v_{zs}$

A függőleges irányú erők egyensúlya:  $\sum F_z = m_s \cdot a_{zs}$

Behelyettesítve:  $F_{zs1b} + F_{zs1j} + F_{zs2b} + F_{zs2j} = m_s \cdot a_{zs}$



2.48 ábra

Behelyettesítve az erőknek az 5/a pontban levezetett képleteit, kapjuk:

$$-s_{zs} \cdot (u_{zs1b} - u_{zk1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1b} - v_{zk1b}) - s_{zs} \cdot (u_{zs1j} - u_{zk1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1j} - v_{zk1j}) - \\ - s_{zs} \cdot (u_{zs2b} - u_{zk2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2b} - v_{zk2b}) - s_{zs} \cdot (u_{zs2j} - u_{zk2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2j} - v_{zk2j}) = m_s \cdot a_{zs}$$

Behelyettesítve a kapcsoló pontok elmozdulásának és sebességének képleteit, kapjuk:

$$-s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l - u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot b) - \\ - d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l - v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b) - \\ - s_{zs} \cdot (u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l - u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b) - \\ - d_{zs} \cdot (v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l - v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b) - \\ - s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l - u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot b) - \\ - d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l - v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot b) - \\ - s_{zs} \cdot (u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l - u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b) - \\ - d_{zs} \cdot (v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l - v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b) = m_s \cdot a_{zs}$$

Összevonások és átrendezés után a mozgásegyenlet a következő:

$$m_s \cdot a_{zs} + 4 \cdot d_{zs} \cdot v_{zs} - 2 \cdot d_{zs} \cdot v_{zk1} - 2 \cdot d_{zs} \cdot v_{zk2} + 4 \cdot s_{zs} \cdot u_{zs} - 2 \cdot s_{zs} \cdot u_{zk1} - 2 \cdot s_{zs} \cdot u_{zk2} = 0$$

**β/ támlógás x-körül:**  $\varphi_{xs}, \omega_{xs}$

Az x-tengely körül forgató nyomatékok egyensúlya:

$$\sum M_x = \Theta_{xs} \cdot \ddot{\varphi}_{xs}$$

A 2.48 ábra alapján a függőleges erők nyomatéka:

$$(F_{zs1b} + F_{zs2b}) \cdot b - (F_{zs1j} + F_{zs2j}) \cdot b = \Theta_{xs} \cdot \varepsilon_{xs}$$

Behelyettesítve az erők képletét, kapjuk:

$$[-s_{zs} \cdot (u_{zs1b} - u_{zk1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1b} - v_{zk1b})] \cdot b + \\ + [-s_{zs} \cdot (u_{zs2b} - u_{zk2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2b} - v_{zk2b})] \cdot b = \Theta_{xs} \cdot \varepsilon_{xs}$$

Behelyettesítve az elmozdulások és sebességek képleteit, a mozgásegyenlet a következő lesz:

$$[-s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l - [u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b])] \cdot b - \\ [-d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b])] \cdot b - \\ [-s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l - [u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b])] \cdot b - \\ [-d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b])] \cdot b = \Theta_{xs} \cdot \varepsilon_{xs}$$

Összevonások és átrendezés után a mozgásegyenlet a következő:

$$\Theta_{xs} \cdot \varepsilon_{xs} + 4 \cdot d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} - 2 \cdot d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xk1} - 2 \cdot d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xk2} + \\ + 4 \cdot s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} - 2 \cdot s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xk1} - 2 \cdot s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xk2} = 0$$

**$\gamma$ / bólintás y-körül:**  $\varphi_{ys}, \omega_{ys}$

Az y-tengely körül forgató nyomatékok egyensúlya:

$$\sum M_y = \Theta_{ys}$$

Felhasználva a 2.48 ábrát, a függőleges erők nyomatékai:

$$(F_{zs2b} + F_{zs2j})l - (F_{zs1b} + F_{zs1j})l = \Theta_{ys}$$

Behelyettesítve az erők képletét, kapjuk:

$$\left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs2b} - u_{zk2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2b} - v_{zk2b}) \right] l + \\ + \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs2j} - u_{zk2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs2j} - v_{zk2j}) \right] l - \\ - \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs1b} - u_{zk1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1b} - v_{zk1b}) \right] l - \\ - \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs1j} - u_{zk1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zs1j} - v_{zk1j}) \right] l = \Theta_{ys} \cdot \ddot{\varphi}_{ys}$$

Behelyettesítve az elmozdulások és sebességek összefüggéseit, az egyenlet alakja:

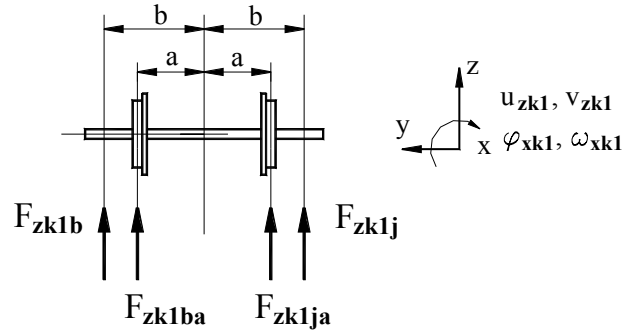
$$\left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l - [u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b]) \right] l + \\ + \left[ -d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b]) \right] l + \\ + \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b + \varphi_{ys} \cdot l - [u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot b]) \right] l + \\ + \left[ -d_{zs} \cdot (v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b + \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot b]) \right] l - \\ - \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l - [u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b]) \right] l - \\ - \left[ -d_{zs} \cdot (v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b]) \right] l - \\ - \left[ -s_{zs} \cdot (u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l - [v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b]) \right] l - \\ - \left[ -d_{zs} \cdot (v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l - [v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b]) \right] l = \Theta_{ys} \cdot \ddot{\varphi}_{ys}$$

Összevonások és átrendezés után a mozgásegyenlet a következő:

$$\Theta_{ys} \cdot \varepsilon_{ys} + 4 \cdot d_{zs} \cdot l^2 \cdot \omega_{ys} + 2 \cdot d_{zs} \cdot l \cdot v_{zk1} + 2 \cdot d_{zs} \cdot l \cdot v_{zk2} + \\ + 4 \cdot s_{zs} \cdot l^2 \cdot \varphi_{ys} + 2 \cdot s_{zs} \cdot l \cdot u_{zk1} - 2 \cdot s_{zs} \cdot l \cdot u_{zk2} = 0$$

**b/ az 1. kerékpár mozgásegyenletei:**

Az 1. kerékpárra ható függőleges erőket a 2.49 ábra foglalja össze:



2.49 ábra

**$\alpha$ / függőleges rázás:**  $u_{zk1}, v_{zk1}$

$$\sum F_z = m_k \cdot a_{zk1}$$

Behelyettesítve:  $F_{zk1b} + F_{zk1ba} + F_{zk1ja} + F_{zk1j} = m_k \cdot a_{zk1}$

Behelyettesítve az 5/a és 5/b pontokban az erőkre kapott képleteket, kapjuk

$$\begin{aligned} & -s_{zs} \cdot (u_{zk1b} - u_{zs1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1b} - v_{zs1b}) - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk1ba} - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ba} - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk1ja} - u_{zpj}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ja} - \\ & -s_{zs} \cdot (u_{zk1j} - u_{zs1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1j} - v_{zs1j}) = m_k \cdot a_{zk1} \end{aligned}$$

Behelyettesítve a kapcsoló pontok elmozdulásait és sebességeit, kapjuk:

$$\begin{aligned} & -s_{zs} \cdot (u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b - [u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l]) - \\ & -d_{zs} \cdot (v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b - [v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l]) - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot a - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot (v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot a) - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot a - u_{zpj}(s_1)] - d_{zp} \cdot (v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot a) - \\ & -s_{zs} \cdot (u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot b - [u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l]) - \\ & -d_{zs} \cdot (v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b - [v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l]) = m_k \cdot a_{zk1} \end{aligned}$$

Összevonás és átrendezés után kapjuk:

$$\begin{aligned} & m_k \cdot a_{zk1} - 2 \cdot d_{zs} \cdot v_{zs} + 2 \cdot d_{zs} \cdot l \cdot \omega_{ys} + 2 \cdot (d_{zs} + d_{zp}) \cdot v_{zk1} - \\ & - 2 \cdot s_{zs} \cdot u_{zs} + 2 \cdot s_{zs} \cdot l \cdot \varphi_{ys} + 2 \cdot (s_{zs} + s_{zp}) \cdot u_{zk1} = \\ & = s_{zp} [u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l)] \end{aligned}$$

**$\beta$ / támlógás x-körül:**  $\varphi_{xk1}, \omega_{xk1}$

Az x-tengely körül forgató nyomatékok egyensúlya:

$$\sum M_x = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1}$$

Behelyettesítve az erőket a 2.49 ábra felhasználásával:

$$F_{zk1b} \cdot b + F_{zk1ba} \cdot a - F_{zk1ja} \cdot a - F_{zk1j} \cdot b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1}$$

Felhasználva az erőkre levezetett képleteket, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned} & [-s_{zs} \cdot (u_{zk1b} - u_{zs1b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1b} - v_{zs1b})] b + \\ & + \left\{ -s_{zp} \cdot [u_{zk1ba} - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ba} \right\} a - \\ & - \left\{ -s_{zp} \cdot [u_{zk1ja} - u_{zpj}(s_1)] - d_{zp} \cdot v_{zk1ja} \right\} a - \\ & - [-s_{zs} \cdot (u_{zk1j} - u_{zs1j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk1j} - v_{zs1j})] b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1} \end{aligned}$$

Behelyettesítve az elmozdulások és sebességek összefüggéseit, az egyenlet alakja:

$$\begin{aligned} & [-s_{zs} \cdot (u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot b - [u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l])] b + \\ & + [-d_{zs} \cdot (v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot b - [v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l])] b + \\ & + \left\{ -s_{zp} \cdot [u_{zk1} + \varphi_{xk1} \cdot a - u_{zpb}(s_1)] - d_{zp} \cdot (v_{zk1} + \omega_{xk1} \cdot a) \right\} a - \\ & - \left\{ -s_{zp} \cdot [u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot a - u_{zpj}(s_1)] - d_{zp} \cdot (v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot a) \right\} a - \\ & - [-s_{zs} \cdot (u_{zk1} - \varphi_{xk1} \cdot b - [u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l])] b - \\ & - [-d_{zs} \cdot (v_{zk1} - \omega_{xk1} \cdot b - [v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l])] b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1} \end{aligned}$$

Összevonások és átrendezés után a mozgásegyenlet alakja:

$$\begin{aligned} & \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1} - 2 \cdot d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} + 2 \cdot (d_{zs} \cdot b^2 + d_{zp} \cdot a^2) \cdot \omega_{xk1} - \\ & - 2 \cdot s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} + 2 \cdot (s_{zs} \cdot b^2 + s_{zp} \cdot a^2) \cdot \varphi_{xk1} = \\ & = s_{zp} \cdot a \cdot [u_{zpb}(v_h \cdot t + l) - u_{zpj}(v_h \cdot z + l)] \end{aligned}$$

### c/ a 2. kerékpár mozgásegyenletei:

A 2. kerékpárra ható függőleges erőkre a 2.49 ábra jelöléseit értelemszerűen alkalmazhatjuk. A mozgásegyenletek összeállítása az egyes szabadságfokokra:

**a/ függőleges rázás:**  $u_{zk2}, v_{zk2}$

$$\sum F_z = m_k \cdot a_{zk2}$$

Behelyettesítve:  $F_{zk2b} + F_{zk2ba} + F_{zk2ja} + F_{zk2j} = m_k \cdot a_{zk2}$

Behelyettesítve az 5/a és 5/b pontokban az erőkre kapott képleteket, kapjuk

$$\begin{aligned} & -s_{zs} \cdot (u_{zk2b} - u_{zs2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2b} - v_{zs2b}) - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk2ba} - u_{zpb}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ba} - \\ & -s_{zp} \cdot [u_{zk2ja} - u_{zpj}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ja} - \\ & -s_{zs} \cdot (u_{zk2j} - u_{zs2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2j} - v_{zs2j}) = m_k \cdot a_{zk2} \end{aligned}$$



Behelyettesítve a kapcsoló pontok elmozdulásait és sebességeit, kapjuk:

$$\begin{aligned}
& -s_{zs} \cdot (u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b - [u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l]) - \\
& -d_{zs} \cdot (v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b - [v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l]) - \\
& -s_{zp} \cdot [u_{zk1} + \varphi_{xk2} \cdot a - u_{zpb}(s_2)] - d_{zp} \cdot (v_{zk2} + \omega_{xk1} \cdot a) - \\
& -s_{zp} \cdot [u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot a - u_{zpj}(s_2)] - d_{zp} \cdot (v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot a) - \\
& -s_{zs} \cdot (u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot b - [u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l]) - \\
& -d_{zs} \cdot (v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot b - [v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l]) = m_k \cdot a_{zk2}
\end{aligned}$$

Összevonás és átrendezés után kapjuk:

$$\begin{aligned}
& m_k \cdot a_{zk2} - 2 \cdot d_{zs} \cdot v_{zs} + 2 \cdot d_{zs} \cdot l \cdot \omega_{ys} + 2 \cdot (d_{zs} + d_{zp}) \cdot v_{zk2} - \\
& - 2 \cdot s_{zs} \cdot u_{zs} + 2 \cdot s_{zs} \cdot l \cdot \varphi_{ys} + 2 \cdot (s_{zs} + s_{zp}) \cdot u_{zk2} = \\
& = s_{zp} \cdot [u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l)]
\end{aligned}$$

**$\beta$ / támlógás x-körül:**  $\varphi_{zk2}, \omega_{zk2}$

Az x-tengely körül forgató nyomatékok egyensúlya:

$$\sum M_x = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2}$$

Behelyettesítve az erőket a 2.49 ábra felhasználásával:

$$F_{zk2b} \cdot b + F_{zk2ba} \cdot a - F_{zk2ja} \cdot a - F_{zk2j} \cdot b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2}$$

Felhasználva az erőkre levezetett képleteket, az alábbi egyenletet kapjuk:

$$\begin{aligned}
& [-s_{zs} \cdot (u_{zk2b} - u_{zs2b}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2b} - v_{zs2b})] \cdot b + \\
& + \{ -s_{zp} \cdot [u_{zk2ba} - u_{zpb}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ba} \} \cdot a - \\
& - \{ -s_{zp} \cdot [u_{zk2ja} - u_{zpj}(s_2)] - d_{zp} \cdot v_{zk2ja} \} \cdot a - \\
& - [-s_{zs} \cdot (u_{zk2j} - u_{zs2j}) - d_{zs} \cdot (v_{zk2j} - v_{zs2j})] \cdot b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2}
\end{aligned}$$

Behelyettesítve az elmozdulások és sebességek összefüggéseit, az egyenlet alakja:

$$\begin{aligned}
& [-s_{zs} \cdot (u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot b - [u_{zs} + \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l])] \cdot b + \\
& + [-d_{zs} \cdot (v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot b - [v_{zs} + \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l])] \cdot b + \\
& + \{ -s_{zp} \cdot [u_{zk2} + \varphi_{xk2} \cdot a - u_{zpb}(s_2)] - d_{zp} \cdot (v_{zk2} + \omega_{xk2} \cdot a) \} \cdot a - \\
& - \{ -s_{zp} \cdot [u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot a - u_{zpj}(s_2)] - d_{zp} \cdot (v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot a) \} \cdot a - \\
& - [-s_{zs} \cdot (u_{zk2} - \varphi_{xk2} \cdot b - [u_{zs} - \varphi_{xs} \cdot b - \varphi_{ys} \cdot l])] \cdot b - \\
& - [-d_{zs} \cdot (v_{zk2} - \omega_{xk2} \cdot b - [v_{zs} - \omega_{xs} \cdot b - \omega_{ys} \cdot l])] \cdot b = \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2}
\end{aligned}$$

Összevonások és átrendezés után a mozgásegyenlet alakja:

$$\begin{aligned} \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2} - 2.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} + 2.(d_{zs} \cdot b^2 + d_{zp} \cdot a^2) \cdot \omega_{xk2} - \\ - 2.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} + 2.(s_{zs} \cdot b^2 + s_{zp} \cdot a^2) \cdot \varphi_{xk2} = \\ = s_{zp} \cdot a \cdot [u_{zpb}(v_h \cdot t - l) - u_{zpj}(v_h \cdot t - l)] \end{aligned}$$

Végül összefoglalva a kapott egyenleteket, a modell differenciálegyenletrendszer:

$$m_s \cdot a_{zs} + 4.d_{zs} \cdot v_{zs} - 2.d_{zs} \cdot v_{zk1} - 2.d_{zs} \cdot v_{zk2} + 4.s_{zs} \cdot u_{zs} - 2.s_{zs} \cdot u_{zk1} - 2.s_{zs} \cdot u_{zk2} = 0$$

$$\begin{aligned} \Theta_{xs} \cdot \varepsilon_{xs} + 4.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} - 2.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xk1} - 2.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xk2} + \\ + 4.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} - 2.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xk1} - 2.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xk2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{ys} \cdot \varepsilon_{ys} + 4.d_{zs} \cdot l^2 \cdot \omega_{ys} + 2.d_{zs} \cdot l \cdot v_{zk1} + 2.d_{zs} \cdot l \cdot v_{zk2} + \\ + 4.s_{zs} \cdot l^2 \cdot \varphi_{ys} + 2.s_{zs} \cdot l \cdot u_{zk1} - 2.s_{zs} \cdot l \cdot u_{zk2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_k \cdot a_{zk1} - 2.d_{zs} \cdot v_{zs} + 2.d_{zs} \cdot l \cdot \omega_{ys} + 2.(d_{zs} + d_{zp}) \cdot v_{zk1} - \\ - 2.s_{zs} \cdot u_{zs} + 2.s_{zs} \cdot l \cdot \varphi_{ys} + 2.(s_{zs} + s_{zp}) \cdot u_{zk1} = \\ = s_{zp} [u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk1} - 2.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} + 2.(d_{zs} \cdot b^2 + d_{zp} \cdot a^2) \cdot \omega_{xk1} - \\ - 2.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} + 2.(s_{zs} \cdot b^2 + s_{zp} \cdot a^2) \cdot \varphi_{xk1} = \\ = s_{zp} \cdot a \cdot [u_{zpb}(v_h \cdot t + l) - u_{zpj}(v_h \cdot z + l)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_k \cdot a_{zk2} - 2.d_{zs} \cdot v_{zs} + 2.d_{zs} \cdot l \cdot \omega_{ys} + 2.(d_{zs} + d_{zp}) \cdot v_{zk2} - \\ - 2.s_{zs} \cdot u_{zs} + 2.s_{zs} \cdot l \cdot \varphi_{ys} + 2.(s_{zs} + s_{zp}) \cdot u_{zk2} = \\ = s_{zp} [u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta_{xk} \cdot \varepsilon_{xk2} - 2.d_{zs} \cdot b^2 \cdot \omega_{xs} + 2.(d_{zs} \cdot b^2 + d_{zp} \cdot a^2) \cdot \omega_{xk2} - \\ - 2.s_{zs} \cdot b^2 \cdot \varphi_{xs} + 2.(s_{zs} \cdot b^2 + s_{zp} \cdot a^2) \cdot \varphi_{xk2} = \\ = s_{zp} \cdot a \cdot [u_{zpb}(v_h \cdot t - l) - u_{zpj}(v_h \cdot t - l)] \end{aligned}$$

Mivel a hét differenciálegyenlet lineáris, definiálhatjuk az alábbi mátrixokat. Az  $\mathbf{M}$  tömegmátrix:

$$\underline{\underline{M}} = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_{xs} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_{ys} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{xk} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Theta_{xk} \end{bmatrix}$$

a  $\underline{\underline{D}}$  csillapítási mátrix:

$$\underline{\underline{D}} = \begin{bmatrix} 4.d_{zs} & 0 & 0 & -2.d_{zs} & 0 & -2.d_{zs} & 0 \\ 0 & 4.d_{zs}.b^2 & 0 & 0 & -2.d_{zs}.b^2 & 0 & -2.d_{zs}.b^2 \\ 0 & 0 & 4.d_{zs}.l^2 & 2.d_{zs}.l & 0 & -2.d_{zs}.l & 0 \\ -2.d_{zs} & 0 & 2.d_{zs}.l & 2.(d_{zs} + d_{zp}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.d_{zs}.b^2 & 0 & 0 & 2.(d_{zs}.b^2 + d_{zp}.a^2) & 0 & 0 \\ -2.d_{zs} & 0 & -2.d_{zs}.l & 0 & 0 & 2.(d_{zs} + d_{zp}) & 0 \\ 0 & -2.d_{zs}.b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(d_{zs}.b^2 + d_{zp}.a^2) \end{bmatrix}$$

és végül az  $\underline{\underline{S}}$  merevségi mátrix a következő:

$$\underline{\underline{S}} = \begin{bmatrix} 4.s_{zs} & 0 & 0 & -2.s_{zs} & 0 & -2.s_{zs} & 0 \\ 0 & 4.s_{zs}.b^2 & 0 & 0 & -2.s_{zs}.b^2 & 0 & -2.s_{zs}.b^2 \\ 0 & 0 & 4.s_{zs}.b^2 & 2.s_{zs}.l & 0 & -2.s_{zs}.l & 0 \\ -2.s_{zs} & 0 & 2.s_{zs}.l & 2.(s_{zs} + s_{zp}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.s_{zs}.b^2 & 0 & 0 & 2.(s_{zs}.b^2 + s_{zp}.a^2) & 0 & 0 \\ -2.s_{zs} & 0 & -2.s_{zs}.l & 0 & 0 & 2.(s_{zs} + s_{zp}) & 0 \\ 0 & -2.s_{zs}.b^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.(s_{zs}.b^2 + s_{zp}.a^2) \end{bmatrix}$$

Emlékeztetőül az  $\underline{y}$  koordinátavektor:

$$\underline{y} = \left[ u_{zs}, \varphi_{xs}, \varphi_{ys}, u_{zk1}, \varphi_{xk1}, u_{zk2}, \varphi_{xk2} \right]^T$$

Ennek az időszerinti deriváltjai:

$$\underline{\dot{y}} = \left[ \dot{u}_{zs}, \dot{\varphi}_{xs}, \dot{\varphi}_{ys}, \dot{u}_{zk1}, \dot{\varphi}_{xk1}, \dot{u}_{zk2}, \dot{\varphi}_{xk2} \right]^T = \left[ v_{zs}, \omega_{xs}, \omega_{ys}, v_{zk1}, \omega_{xk1}, v_{zk2}, \omega_{xk2} \right]^T$$

$$\text{és } \underline{\ddot{y}} = \left[ \ddot{u}_{zs}, \ddot{\varphi}_{xs}, \ddot{\varphi}_{ys}, \ddot{u}_{zk1}, \ddot{\varphi}_{xk1}, \ddot{u}_{zk2}, \ddot{\varphi}_{xk2} \right]^T = \left[ a_{zs}, \varepsilon_{xs}, \varepsilon_{ys}, a_{zk1}, \varepsilon_{xk1}, a_{zk2}, \varepsilon_{xk2} \right]^T$$

Végül az egyenletek jobboldalán a pályahibák okozta függőleges lengésgerjesztések oszlopvektora:

$$\underline{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ s_{zp} \left[ u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l) \right] \\ s_{zp} \cdot a \left[ u_{zpb}(v_h \cdot t + l) - u_{zpj}(v_h \cdot z + l) \right] \\ s_{zp} \left[ u_{zpb}(h_h \cdot t + l) + u_{zpj}(v_h \cdot t + l) \right] \\ s_{zp} \cdot a \left[ u_{zpb}(v_h \cdot t - l) - u_{zpj}(v_h \cdot t - l) \right] \end{bmatrix}$$

Az  $\underline{M}$ ,  $\underline{D}$  és  $\underline{S}$  mátrixok, valamint az  $\underline{y}$ ,  $\dot{\underline{y}}$ ,  $\ddot{\underline{y}}$  és  $\underline{g}$  vektorok segítségével a mozgásegyenletrendszert az alábbi mátrix-vektoros alakba foglalhatjuk össze:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{D}} \cdot \dot{\underline{y}} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{y} = \underline{g}$$

A mozgásegyenletrendszer homogén része:

$$\underline{\underline{M}} \cdot \ddot{\underline{y}} + \underline{\underline{D}} \cdot \dot{\underline{y}} + \underline{\underline{S}} \cdot \underline{y} = \underline{0}$$

A homogén mozgásegyenletrendszert még tömörebb formába foglalhatjuk össze, ha az  $\underline{y}$  és  $\dot{\underline{y}}$  vektorokat a  $\underline{q}$  állapotvektor hipervektorába foglaljuk össze:

$$\underline{q} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \left[ v_{zs}, \omega_{xs}, \omega_{ys}, v_{zk1}, \omega_{xk1}, v_{zk2}, \omega_{xk2}, u_{zs}, \varphi_{xs}, \varphi_{ys}, u_{zk1}, \varphi_{xk1}, u_{zk2}, \varphi_{xk2} \right]^T$$

Ekkor írható:

$$\dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \dot{\underline{y}} \\ \underline{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{D}} & -\underline{\underline{M}}^{-1} \cdot \underline{\underline{S}} \\ \underline{\underline{E}} & \underline{\underline{0}} \end{bmatrix} \cdot \underline{q} = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{q}$$

ahol  $\dot{\underline{q}}$  az állapotvektor deriváltja,  $\underline{\underline{A}}$  a rendszermátrix,  $\underline{\underline{E}}$  az egységmátrix és  $\underline{\underline{0}}$  a zérusmátrix.

**2.6.4 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott függőleges pályahibákon való végigfutásának szimulálására (nemlineáris változat)**

(Készítés alatt)

**2.6.5 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott keresztirányú pályahibákon való végigfutásának szimulálására (lineáris változat)**

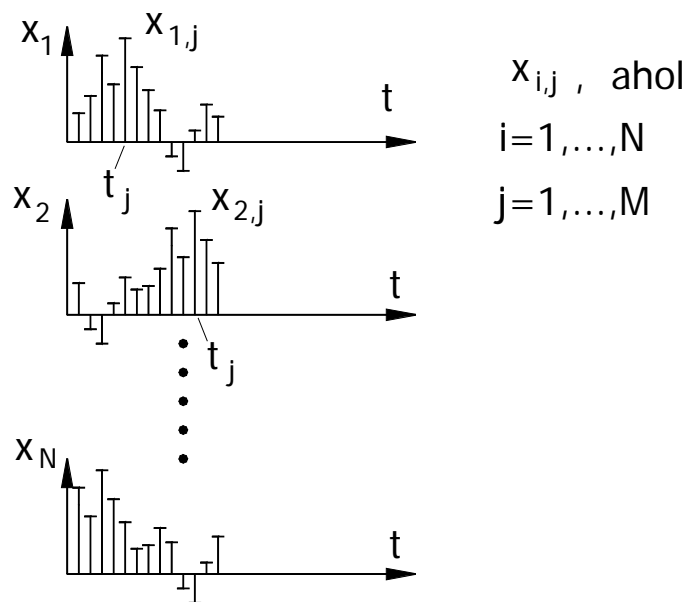
(Készítés alatt)

**2.6.6 Kéttengelyes vasúti jármű dinamikai modellje adott keresztirányú pályahibákon való végigfutásának szimulálására (nemlineáris változat)**

(Készítés alatt)

## 2.8 A számított eredmények megjelenési formája és további felhasználási lehetőségei

b/ a szimuláció  $\underline{x}(t)$  mozgásfüggvény-halmazának közvetlen felhasználása, illetve az ebből számítható kapcsolódó eredmények. Itt jegyezzük meg, hogy mivel az  $N$  egyenletből álló mozgásegyenlet-rendszer általában csak numerikusan oldható meg, ezért az egyes  $i$ -ik ( $i=1, \dots, N$ ) számított mozgásfüggvény diszkrét ( $t_j, x_{ij}$ ) értékpárok (általában) nagyméretű,  $M$  értékből álló halmaza alakjában áll rendelkezésre (2.31 ábra):



2.31 ábra

Megjegyzés: az  $x_{1,j}, x_{2,j}, \dots, x_{N,j}$ ,  $j=1, \dots, M$  halmazok mellett a mozgásfüggvények megoldása szolgáltatja az  $\dot{x}_{1,j}, \dot{x}_{2,j}, \dots, \dot{x}_{N,j}$ ,  $j=1, \dots, M$  sebességfüggvény-értékek halmazait is.

A fontosabb alkalmazási lehetőségek az alábbiak lehetnek:

- a  $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$  sebességfüggvényekkel ellenőrizhető, hogy teljesíthető-e az előírt menetrend, el tudja-e érni a jármű a megengedett sebessége, stb.,
- a  $v_i(t)$  sebességfüggvényből ki lehet számítani a hajtómotor  $n_i(t)$  fordulatszám-idő függvényét, és így a hatásfok  $\eta_i(t)$  függvény is meghatározható.
- a  $v_i(t)$  sebességfüggvényből ellenőrizhetők a nyomatékváltó átkapcsolási folyamatai;
- stb.