

AMGD

Dr. Gausz Tamás

Hő- és áramlástan

ÁRAMLÁSTAN

Előadás-vázlat

(Közlekedésmérnöki Kar BMEKORHA105 tantárgyához)

**Budapest
2014**

7DE.7.1.

Tartalomjegyzék

1.	A folyadékok és gázok fizikai jellemzői.....	1
2.	Matematikai segédeszközök.....	6
3.	A térerősség és a potenciálos erőterekben értelmezhető potenciál.....	9
4.	A derivált-tenzor.....	13
5.	Kinematika.....	17
6.	A transzport egyenlet.....	21
7.	A fizika megmaradási elvei – az áramlástanban.....	22
8.	Hidrostatika.....	28
9.	Komplex potenciálok.....	31
10.	Örvényes áramlások.....	36
11.	Az impulzus tétel alkalmazása.....	41
12.	A Bernoulli egyenlet alkalmazása.....	52
13.	Légcsavar (hajócsavar) és szélkerék.....	55
14.	Összenyomható közegek áramlása.....	62
15.	Súrlódásos áramlások.....	70
16.	A határréteg elmélet elemei.....	79
17.	A kiterjesztett Bernoulli egyenlet.....	85
18.	Testek körüli áramlások.....	92
19.	Áramlástan gépei – bevezető.....	99

Előszó

Az itt következő tananyag a BME Közlekedésmérnöki és Járműmérnöki Kar alapképzésben részt vevő hallgatói számára készült – azokat a tananyag részeket tartalmazza, amelyek a közlekedésben dolgozó mérnökök számára mintegy alapképzésként elvárható ismereteket jelentenek, illetve amely anyag lehetővé teszi, hogy a járműmérnöki szakirányban továbbtanuló hallgatók legalább részben ezekre az alapokra építhessék a szakirányú tanulmányaikat. Az elméleti anyagrészeket mintafeladatokkal egészítettük ki – ezek tanulmányozása elősegíti az elméleti ismeretek jobb megértését és a tényleges feladat megoldást.

Itt fejezem ki hálás köszönetemet *Dr. Perjési István* egyetemi adjunktusnak, aki a kéziratot gondosan átnézte és tanácsaival jobbra tenni segítette. Hasonlóképpen köszönet illeti a jegyzetet használó hallgatókat, akik szintén számos észrevétellel segítettek jobbra tenni a munkát.

Az itt következő tananyag **előadás vázlat**nak készült és ennek megfelelően kell használni is. A tananyagot elsajátítani **önmagában**, csak ebből az előadás-vázlatból nem célszerű. Ennek az előadás-vázlatnak az a célja, hogy a tananyag minimumát rögzítse, és a tanulást elősegítse. Természetesen nem pótolja az előadások meghallgatását, de elősegíti az önálló tanulást.

A tanulás általában munka is – az eredményes munka pedig sikerélményt ad. Az anyag elsajátítása csak komoly munkával lehetséges. Segítségként irodalom-jegyzéket adtunk meg: az ott felsorolt jegyzetek és könyvek segíthetnek a tananyag jelen előadás vázlatban csak röviden bemutatott részeinek alaposabb megértésében.

Rá kell mutatni arra is, hogy ez az előadás vázlat az „Áramlástan” tudományterület igen csak minimális részét tartalmazza – azt a részt, amit a sajnálatos módon rövidre szabott előadás keret megenged. Az igényes Olvasó nem elégedhet meg e munka tanulmányozásával, különösen akkor nem, ha tekintetbe vesszük, hogy erről a tématerületről régebbi és modern, magyar nyelvű, igen jól megírt szakirodalom is rendelkezésre áll.

A hallgatók hosszú távú és alapvető érdeke az, hogy a szakterületüket alkotó tudományokból alapos ismereteket szerezzenek, akkor is, ha napjainkban ezzel ellentétes tendenciák érvényesülésének lehetünk tanúi.

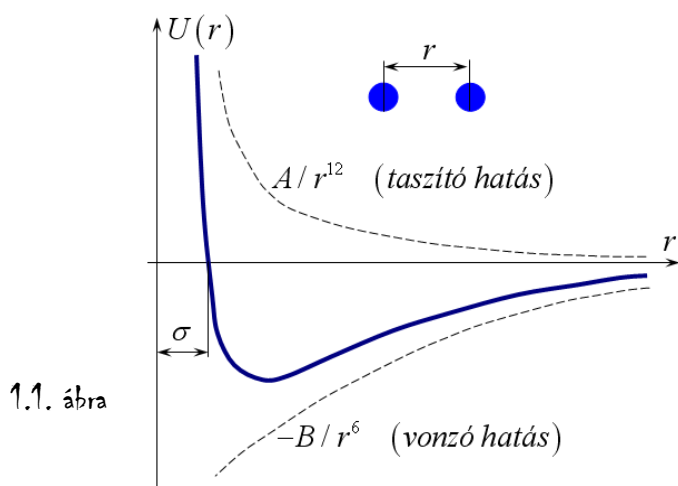
Gróf Széchenyi István: „Egy nemzet ereje a kiművelt emberfők sokaságában rejlik.”

(Az esetleges megjegyzéseket a: tgausz@rht.bme.hu címre kérem – minden javító szándékú megjegyzésért ez úton is köszönetet mondok.)

A folyadékok és gázok – a későbbiekben ezeket általában *közeg*nek nevezzük – részecskékből állnak. A részecske-szemlélet alapján vezethetjük be, illetve értelmezhetjük a számunkra legfontosabb fizikai tulajdonságokat.

Ebben az előadás vázlatban úgy tekintjük, hogy a folyadékok és gázok részecskéinek tömege és sebessége van, illetve ebből következően minden részecskének van mozgásmennyisége (más szóval lendülete, vagy eleven ereje; ez a tömeg és a sebesség szorzata) és mozgási energiája.

Létezik továbbá a részecskék között egy, párpotenciállal jellemzett kapcsolat is, amelyet az 1.1. ábrán vázoltunk (a párpotenciál szigorúan véve két részecske között értelmezhető, de a hatás nagyon sok részecske esetében is hasonló).



1.1. ábra

Az 1.1. ábrán – példaként – a Lennard-Jones féle, 6-12-es párpotenciál (vastag, folytonos vonal), illetve ennek két összetevője látható. A felső, szaggatott vonal a Pauli féle, az elektron-felhők kölcsönhatásából adódó taszító hatást (erőt) mutatja. Az alsó, szintén szaggatott vonal pedig a van der Waals féle, dipólusok kölcsönhatásán alapuló vonzó hatást (erőt) mutatja. Az eredő a két rész összege.

A taszító hatás kis távolságokon (kb. tized-nanométeren belül) érvényesül; a vonzó hatás, a *kohézió* az ettől sokkal nagyobb távolságokra jellemző.

A folyékony folyadék részecskéi egymáshoz olyan közel helyezkednek el (pl. az ábrán látható „B” betű elhelyezkedésének megfelelő távolságban), hogy közöttük lényeges vonzó hatás jut érvényre – ezt kohézióknak is nevezzük. Erre a tényre a későbbiekben, a viszkozitás vizsgálatokkor visszatérünk.

A gáznemű közegek részecskéi között lévő átlagos távolság sokkal nagyobb, mint a folyadékok részecskéi közötti távolság. Ezért a gázok részecskéi közötti vonzóerő is sokkal kisebb, ezt a hatást a továbbiakban elhanyagolhatóan kicsinek tekintjük.

Az eddig tekintett tulajdonságok a közegekre, mint részecskékből álló halmazra jellemzőek. A következőkben a legfontosabb fizikai tulajdonságokat definiáljuk, a részecske szemlélet alapján. Tekintsünk egy egyszeresen összefüggő, zárt térfogatot. Nyilvánvalóan az ebben a térfogatban helyet foglaló részecskék összes tömege lesz a közeg *tömege*. A *sűrűség* pedig a tömeg és a térfogat hányadosa:

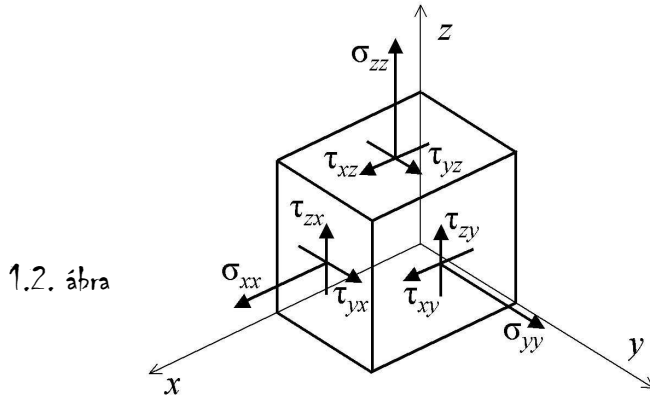
$$\rho = \frac{m}{V} \tag{1.1}$$

A tömeg példa az *extenzív* mennyiségekre, ezek értéke a vizsgált rendszer méretével arányosan változik. A sűrűség pedig a tömeghez kapcsolt *intenzív* mennyiség, ennek értéke nem függ a tekintett rendszer méretétől.

A folyadékokban és gázokban is értelmezzük a feszültségeket (mértékegységük alapesetben $[N/m^2]$ vagy másképpen $[Pa]$ – Blaise Pascalról elnevezve; $1 [N/m^2] = 1 [Pa]$), amelyek segítségével a felületi erők határozhatók meg:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{\Pi} d\mathbf{A} \quad (1.2)$$

A feszültség-tenzor részletesen kiírva a következő:



A feszültség tenzor:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \text{ illetve:}$$

$$d\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} dA_x + \tau_{xy} dA_y + \tau_{xz} dA_z \\ \tau_{yx} dA_x + \sigma_{yy} dA_y + \tau_{yz} dA_z \\ \tau_{zx} dA_x + \tau_{zy} dA_y + \sigma_{zz} dA_z \end{bmatrix}$$

A feszültségek indexelése a következő elv szerint történik:

- ▶ az első index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengely irányába mutat;
- ▶ a második index megmutatja, hogy a feszültség összetevő mely koordináta tengelyre merőleges síkban fekszik.

Csak megjegyezzük, hogy [4]-ben (125. oldal) vagy [8]-ban (337. oldal) a feszültség-tenzor elemeinek index-sorrendje éppen ellenkezője a fentiekben alkalmazottnak, azonban az értelmezés is fordított – vagyis a felírás ezekkel a művekkel azonos. Amiért ezt a formát választottuk annak oka az, hogy az általános mechanikában és a nemzetközi szakirodalomban is az általunk használt jelölésmód az elterjedtebb.

A feszültség-tenzor főátlójában a statikus nyomás és adott esetben a turbulens nyomás-többlet található. A **statikus nyomás** a közeg részecskéinek rendezetlen hőmozgásából ered: a részecskék mozgásmennyisége ütközésekor megváltozik – e mozgásmennyiség-változás időegységre és felületegységre vonatkoztatott értékét nevezzük statikus nyomásnak. Mivel a rendezetlen hőmozgásnak nincs kitüntetett iránya, ezért a statikus nyomásnak sincs kitüntetett iránya – tehát skalár mennyiség.

Megjegyezendő, hogy a skalár mennyiség másik oldalról nézve nulla-indexes tenzornak tekinthető (a nullaindexes helyett a nulladrendű megnevezés is használatos). A vektorok egy-indexes (vagy elsőrendű) tenzorok és a fentiekben bemutatott feszültség-tenzor két-indexes (vagy másodrendű) tenzor. Ezt a gondolatsort folytathatjuk és definiálhatunk magasabb index-számú, azaz magasabb rendű tenzorokat is – jóllehet ebben az előadás vázlatban nem fordul elő ilyen.

A statikus nyomás legkisebb értéke nyilván a nulla, hiszen a nyomást az ütköző részecskék sebessége, tömege és száma határozza meg – és nyilván legfeljebb nem ütközik egyetlen részecske sem.

A **turbulens nyomás-többlet** hasonló a statikus nyomáshoz, mivel az is egy rendezetlen, nulla várható értékű mozgásforma eredménye. A kétféle normál feszültség összetevő között a különbség abban rejlik, hogy a turbulens mozgás intenzívebb, esetleg sokkal intenzívebb, mint a rendezetlen hőmozgás, ezért a turbulens mozgásból származó feszültségek általában nagyobbak, mint a rendezetlen mozgásból eredő feszültségek.

Amennyiben a közegben egy szilárd felület van, akkor ez a felület a közeget lényegében két féltérre osztja. Ekkor azonban minden, a felülethez az egyik féltér valamely irányából érkező (ütköző) részecskéhez nagyon nagy valószínűséggel találhatunk egy „párt”, egy olyan részecskét, amelynek az ütközése az első részecske ütközésének tükröke. Ennek alapján kijelenthető, hogy a szilárd felületen a statikus nyomás a felületre merőlegesen keletkezik. Ebből következik az is, hogy a statikus nyomás egy felületre merőleges (elegendően kis átmérőjű) furat segítségével mérhető.

A feszültség-tenzor főátlón kívüli elemei a csúsztató feszültségek. A csúsztató feszültség keletkezésének fő oka – folyékony folyadék réteges áramlásának estében, amikor a részecskék elég közel vannak egymáshoz – a részecskék között keletkező kohéziós erő (1.1. ábra – „vonzó hatás”).



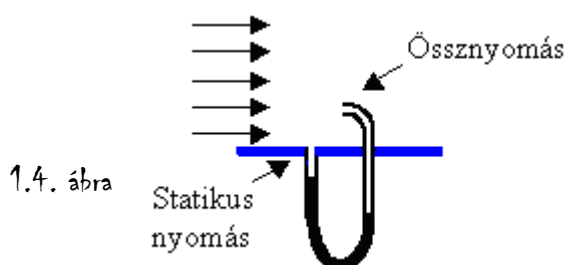
A gáznemű közegek réteges és gomolygó áramlásában egyaránt, valamint a folyékony folyadék gomolygó áramlásában a csúsztató feszültség keletkezésének fő oka a részecske cserével (1.3 ábra) létrejövő mozgásmennyiség csere (mozgásmennyiség transzport). A részecske csere oka réteges áramlásban a hőmozgás, gomolygó (turbulens) áramlásban ehhez adódik még a turbulens sebesség-ingadozások miatti – esetenként sokkal intenzívebb – részecske csere. A csúsztató feszültség keletkezésének szükséges feltétele a sebesség különbség (1.3. ábra).

A fentiekből következik, hogy folyékony folyadék esetében, a hőmérséklet növekedésével, amikor a részecskék a hőmozgás intenzitásának növekedése miatt egymástól távolabb kerülnek, a súrlódó feszültség csökken. Ugyanakkor, a gázok réteges (lamináris) áramlásának esetében, a hőmérséklet növekedésével nő a csúsztató feszültség. Az ebben a csúsztató feszültségben szereplő dinamikai viszkozitást anyagjellemzőnek tekintjük, ezt a csúsztató feszültséget a későbbiekben a deformáció-sebességekkel és a dinamikai viszkozitással határozzuk meg (pl. 15.2 sz. képlet). A későbbiekben a dinamikai viszkozitás mellett szó lesz a turbulens dinamikai viszkozitásról is, ez utóbbi viszkozitás a mozgásjellemzők függvénye.

A gomolygó áramlásokban a csúsztató feszültség keletkezése a turbulens sebesség-ingadozások következménye – vagyis ezek függvényében határozzuk majd meg. A turbulens csúsztató feszültség tehát a mozgásállapottól (is) függ.

Csak megjegyezzük, hogy a részecske csere nem csak mozgásmennyiség, hanem egyúttal anyag és energia transzportot is jelent.

A nyomással kapcsolatban szólni kell még a **dinamikus nyomás**ról, illetve az **össznyomás**ról is. A dinamikus nyomás a részecskék rendezett mozgásából származó, időegységre illetve felületegységre jutó mozgásmennyiség változás, ezért természetesen irányfüggő – mégis, a hagyományos tárgyalásmódnak megfelelően skalár mennyiségként számolunk vele. Az **intenzív** mennyiségek csoportjába tartozik. A dinamikus nyomás közvetlenül nem mérhető. Mérhető viszont a dinamikus és statikus nyomás összegeként előálló össznyomás.



Az össznyomást mérni olyan nyomásmérő eszközzel lehet, amelynek érzékelője a mozgással szembe néz (pl. az áramlással szembe fordított cső ilyen). Az 1.4. ábrán egy "U" csöves nyomásmérő eszköz látható. Ennek bal oldalán a statikus nyomás, a jobb oldali szárában az össznyomás jelenik meg.

Ennek megfelelően a folyadék-oszlop magasság különbsége arányos a dinamikai nyomással, a műszer ilyenképpen az össznyomás és a statikus nyomás különbségét mutatja, azaz mint egy analóg számológép működik.

Amennyiben a közegben szilárd test helyezkedik el, akkor annak a felületén is keletkezik csúsztató feszültség, hacsak a közeget viszkózusnak tekintjük (vagyis nem hanyagoljuk el a viszkozitást) és a közeg illetve a test egymáshoz képest mozog. Szilárd fal esetében a közeg részecskéi a falnak ütköznek, és onnan visszapattannak. Nagyszámú részecske és érdes fal esetén feltehető, hogy a visszapattanás várható iránya nagyjából azonos az érkezés irányával. Ebből következik, hogy a szilárd falnak ütköző részecskék sebességének várható értéke a falhoz nagyon közel nulla. Hangsúlyozzuk: ez a várható érték pontosan akkor áll elő, ha egyetlen fizikai részecske sem áll meg, éppen ellenkezőleg, mindegyiknek vissza kell pattannia! Ez a nulla várható érték a fizikai alapja annak, hogy a kontinuumként tekintett közegnél, súrlódás esetén azt mondjuk, hogy a szélső réteg áll. Ez a tapadási feltétel (ami persze megint csak elegendően nagy részecske szám esetén igaz, vagyis mikro- és nano- áramlásokban nem, ott a szélső réteg nem áll) kontinuumra vonatkozik, vagyis olyan idealizált közeg-modellre, amely a teret folytonosan tölti ki és így a szélső rétegének vastagsága infinitezimális – a legkisebb, létező részecske átmérőjénél végtelenszer kisebb. (A későbbi tárgyalás alapját jelentő kontinuum modellt később vezetjük be.)

Vezessük be a **statikus hőmérséklet** fogalmát is: ez a részecskék rendezetlen mozgásának átlagos kinetikai energiája, egy, empirikus skálán mérve. A gázok esetében igen szemléletes kapcsolat létezik: az általános gáztörvény szerint a statikus nyomás egyenlő a sűrűség és a statikus hőmérséklet szorzatával ($p = R \rho T$) – az "R" gázállandó az átváltáshoz szükséges konstansként is értelmezhető. A statikus hőmérséklet szintén skalár jellegű, intenzív mennyiség, mérése a közeggel együttmozgó hőmérővel lehetséges.

A **dinamikus hőmérséklet** a dinamikus nyomáshoz hasonlóan a rendezett mozgás kinetikai energiájának a mértéke, a már említett empirikus skálán. Nyilvánvalóan a dinamikus hőmérséklet csak viszonylag nagy áramlási sebességek esetében jelentős, mérsékelt sebességű áramlásokban a figyelembe vételétől gyakran eltekintenek. Skalárnak tekintett, intenzív mennyiség, közvetlenül nem mérhető, viszont mérhető a statikus és dinamikus hőmérséklet összegeként definiált **összhőmérséklet** vagy **torlóponti hőmérséklet**. A mérésre az ún. torlópont-hőmérő használatos, amely a közeget – minden mozgást rendezetlenné téve – megállítja, és a megállított közeg hőmérsékletét méri.

A folyadékok és gázok – közegek – fizikai tulajdonságait tehát általában is az őket alkotó részecskék tulajdonságai alapján definiálhatjuk. A részecske szemléleten alapuló vizsgálat a statisztikus mechanika eszközeinek felhasználásával lehetséges (pl. Boltzmann egyenlet, rác-Boltzmann módszer, stb.) – ezzel a kérdéskörrel azonban itt nem foglalkozhatunk.

Elnevezés	Matematikai leírás	Megjegyzés
Sűrűség:	$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Nyomás:	$p = p(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Hőmérséklet.	$T = T(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Potenciál	$U = U(\mathbf{r}, t);$ vagy $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$	Skalár-vektor függvény.
Áramfüggvény	$\psi = \psi(x, y, t)$	Skalár-vektor függvény.
Sebesség	$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, t)$	Vektor-vektor függvény.

Ebben a tantárgyban az áramlástan ma már klasszikusnak tekinthető szemléletmódját, a kontinuum hipotézist és az ehhez illeszkedő, Euler-féle leírást alkalmazzuk. Ez a tárgyalás azon alapul, hogy a vizsgált közegeket a fizikai teret folytonosan kitöltő kontinuumnak tekintjük. Ez a kontinuum a részecske szemlélettel ellentétben folytonos, részei végtelen kicsik (infinitezimálisan kicsik) és ezért viselkedése, tulajdonságai többnyire folytonos függvények segítségével írhatók le. A legfontosabb függvényeket a fenti táblázatban foglaltuk össze:

Ebben a jegyzetben időtől függő potenciál nem fordul elő. Hasonlóképpen e jegyzet csak az időtől független, síkáramlásokra vonatkozó áramfüggvényekkel foglalkozik.

A mechanika más területein és esetenként az áramlástanban is felmerül a Lagrange féle mozgás-leírás lehetősége. Ebben az esetben egyes testek – az áramlástanban különféle értelemben használt részecskék – mozgását vizsgáljuk. Ez a szemléletmód magától értetődő, ha csak kevés testet kell vizsgálni (pl. az égi mechanika legegyszerűbb feladataiban), de hatványozottan fokozódó nehézségekkel jár, ha a testek (részecskék) száma növekszik. Ezzel együtt egyes esetekben, a modern eszközök birtokában ez a nehézség legyőzhető – a korszerű áramlástanban elfordulnak ilyen szemléletmódban megoldott feladatok is.

Az áramlásban – a fizika sok más ágához hasonlóan – nagy szerepet játszik a Hamilton féle *nabla* operátor. A nabla operátort a következő módon szokás meghatározni:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}; \text{ illetve sorvektorként: } \nabla^T = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \quad (2.1)$$

A nabla operátor segítségével végrehajtható néhány, az áramlásban igen gyakran szükséges differenciálás. Skalár-vektor függvényre alkalmazva a vizsgált mennyiség *gradiens* vektorát kapjuk. Tekintsük példaként a nyomást:

$$\mathbf{grad} p = \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = \nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.2)$$

A nyomás gradiense – például – megmutatja a nyomás-változás irányát és nagyságát. Másrészt az eredetileg skalár mennyiségből (nulladrendű tenzor) vektort (első rendű tenzort) állít elő.

A nabla operátort vektor-vektor függvényekre háromféle módon alkalmazhatjuk. Az első mód a skalár vagy belső szorzat alkalmazása a *divergencia* számításához vezet:

$$\mathit{div} \mathbf{c} = \nabla^T \mathbf{c} = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right] \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z}; \quad (2.3)$$

A fenti számolásban a sebesség vektor, vagy egy-indexes (elsőrendű) tenzor divergenciáját határoztuk meg. További példaként számítsuk ki a feszültség tenzor divergenciáját. Ebben az esetben – kissé nagyvonalúan eljárva – tekintsünk el attól, hogy ez a szorzat nem kommutatív – a következő eredményre jutunk:

$$\mathit{div} \mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi} \nabla = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.4)$$

Ennél a számolásnál a két-indexes tenzorból egy-indexes tenzort, vektort kaptunk. A divergencia számítás tehát a tenzorok index-számát redukálja.

A második lehetőségként, a vektori szorzat alkalmazásával a **rotációt** számítjuk ki. Ez, Descartes féle, derékszögű koordináta rendszerben az alábbi determináns kifejtésével lehetséges:

$$\mathbf{rot} \mathbf{c} = \nabla \times \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} \\ \frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x} \\ \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \end{bmatrix}; \quad (2.5)$$

A rotáció – ami egyébként fizikai jelentése szerint a helyi szögsebesség kétszerese – ismét vektor mennyiség, ebben az esetben a differenciálás nem változtatja meg a tenzor rendjét.

Harmadszorra tekintsük a diadikus vagy külső szorzattal számítható **derivált tenzort**:

$$\mathbf{D} = \mathbf{c} \circ \nabla^T = \begin{bmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} & \frac{\partial c_x}{\partial y} & \frac{\partial c_x}{\partial z} \\ \frac{\partial c_y}{\partial x} & \frac{\partial c_y}{\partial y} & \frac{\partial c_y}{\partial z} \\ \frac{\partial c_z}{\partial x} & \frac{\partial c_z}{\partial y} & \frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix}; \quad (2.6)$$

Ez a művelet egy-indexes tenzorból két-indexes tenzort állít elő. A tenzor voltát elnevezésével is hangsúlyozó derivált tenzor (kétindexes tenzor) igen jelentős szerepet kap az áramlás-tanban. (Hasonlóan fontos a feszültség – szintén kétindexes – tenzor.)

A nabla operátor önmagával vett skalár szorzata egy skalár operátort, a Laplace operátort szolgáltatja:

$$\nabla^T \nabla = \Delta = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]; \quad (2.7)$$

A differenciálási műveletek lezárásaként felírunk néhány, magasabb rendű differenciálás-ra vonatkozó azonosságot:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} p) = \nabla \times (\nabla p) = \mathbf{0}; \quad (2.8)$$

$$\mathit{div}(\mathbf{rot} \mathbf{c}) = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{c}) = 0; \quad (2.9)$$

$$\mathit{div}(\mathbf{grad} p) = \nabla^T (\nabla p) = \Delta p; \quad (2.10)$$

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{grad}(\mathit{div} \mathbf{c}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c}) \quad (2.11)$$

Ezeket az azonosságokat például számolással lehet ellenőrizni. Ajánlatos ezt – a fenti ismeretek gyakorlásának érdekében – önállóan elvégezni! Ezzel a témakörrel egyébként, megfelelő színvonalon a [21] vagy [22] – illetőleg más, hasonló irodalmi mű foglalkozik.

A további, ebben az előadás vázlatban előforduló áramlástan ismeretek elsajátításához szükség van még két integrál tételre. Tekintsük elsőként a Gauss-Osztrogradszkij tételt:

$$\int_{(A)} \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{c} dV \quad \text{és} \quad \int_{(A)} \mathbf{\Pi} \mathbf{dA} = \int_V \operatorname{div} \mathbf{\Pi} dV ; \quad (2.12)$$

Ebben a tételben egy egyszeresen összefüggő, zárt felületet kell kijelölni (A) – az integrálást mindkét esetben erre a felületre, illetve az e felület által kijelölt térfogatra (V) kell elvégezni. Csak megjegyezzük, hogy a fent példaként is bemutatott (2.12)-ben, a bal oldali kifejezés a térfogat-áramot, a jobb oldali kifejezés az eredő felületi erőt jelenti.

A másik integrál-tétel a Stokes tétel:

$$\oint_{(A)} \mathbf{c} \mathbf{ds} = \int \operatorname{rot} \mathbf{c} \mathbf{dA} ; \quad (2.13)$$

A **cirkulációt** (jele: Γ) egyébként éppen a fent megadott, Stokes tétel bal oldali tagjának felhasználásával szokás definiálni:

$$\Gamma = \oint \mathbf{c} \mathbf{ds} ; \quad (2.14)$$

A matematikai összefoglaló csak nagyon röviden és tömören, a leglényegesebb ismereteket foglalja össze. Ezek az eszközök – kellő begyakorlás híján – elrejtetik az áramlástan anyag fizikai mondanivalóját. Ugyanakkor, megfelelő szinten elsajátítva őket könnyen átláthatóvá, egyszerűvé teszik a tananyag elsajátítását. Vagyis: ezeknek az eszközöknek az elsajátítása, készség szinten történő alkalmazása nagyon fontos. Viszont ezt senki más, csak a hallgató teheti meg, neki kell úgy tanulnia, hogy a matematika ne akadály, hanem segítség legyen.

3. A térerősség és a potenciális erőterekben értelmezhető potenciál - 9 -

Az általános fizikai ismeretek felfrissítéseként meghatározzuk a **térerősség** fogalmát: a térerősség valamely erőterben (esetünkben: nehézségi, tehetetlenségi, centrifugális vagy Coriolis erőter) elhelyezkedő, egységnyi tömegre ható erő:

$$\mathbf{g} [N/kg];$$

Figyelem, a térerősség itt nem csak a gravitációs erőter térerőssége, hanem az összes fel-lépő erőter eredő térerősségét jelenti. Dimenzióját gyakran gyorsulás-dimenzióként adják meg, ez nem helytelen, de a térerősség fizikai tartalmára a fenti dimenzió jobban rámutat.

Amennyiben egy erőternek létezik (skalár) **potenciálja** ($U = U(\mathbf{r})$ – skalár-vektor függvény), akkor ebből a potenciálból a térerősség az alábbi módon számolható:

$$\mathbf{g} = -\mathbf{grad} U ; \quad (3.1)$$

A potenciál létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az erőter térerőssége rotációmentes legyen. A potenciális vagy konzervatív erőterekben a potenciál a térerősség ellenében végzendő munkaként számítható:

$$U_B - U_A = -\int_A^B \mathbf{g}^T \mathbf{ds} ; \quad (3.2)$$

A (3.2) kifejezés alapján belátható a fizikából jól ismert tény, ami szerint a potenciál abszolút értéke nem fontos, illetve nem is ismert – a számításokban csak a potenciál-különbség játszik szerepet.

Az áramlástan feladatokban a leggyakrabban a nehézségi, a tehetetlenségi és a centrifugális erőter fordul elő, mint potenciális erőter. Nem potenciális erőterre tipikus példa az itt nem részletezett Coriolis erőter.

A nehézségi erőter potenciálja (feltéve, hogy a nehézségi erőter térerősségével – e térerősséget itt g_n -nel jelöljük – párhuzamos a „z” tengely; egyszerűen fogalmazva, a „z” tengely függőleges):

$$U = \pm g_n z \quad (3.3)$$

A fenti kifejezést egyszerűen egységnyi tömeg helyzeti energiájának is nevezik. Az előjel pozitív, ha a növekvő „z” értékekhez növekvő helyzeti energia tartozik: vagyis, ha a „z” tengely felfele mutat. A fent leírtak szerint a potenciál a térerősség ellenében végzett munka: mivel ebben az esetben a térerősség lefele mutat, a munkát ellene éppen a felfele mozgással végezzük. Másrészt, matematikailag a vizsgált esetbeli pozitív előjel a (3.2) formális kiszámításából is következik.

Negatív lesz a nehézségi erőter potenciál kifejezésének előjele akkor, ha a „z” tengely lefele mutat. Ekkor az egyre magasabban elhelyezett tömeg helyzeti energiája pontosan úgy növekszik, hogy a negatív előjelű kifejezésbe negatív előjelű (növekvő abszolút értékű) „z” koordinátákat írunk.

Ez a kis példa azt a nagyon fontos fizikai elvet is bemutatja, ami szerint egy fizikai jelenség természetesen független a koordináta rendszer választásától. Azért meg kell jegyezni, hogy elengedhetetlen a korrekt számolás és természetesen vannak alkalmas és nem igazán alkalmas koordináta rendszerek: alkalmas (jó) választással a feladat megoldása jelentősen megkönnyíthető, ellenkező esetben, nem igazán alkalmas koordináta rendszer választása a feladat megoldásában akár legyőzhetetlen nehézséget is okozhat!

Másodikként vizsgáljuk a tehetetlenségi erőteret. Most – az egyszerűség kedvéért – csak olyan eseteket vizsgálunk, ahol a tehetetlenségi erőteret térerőssége vízszintes. Legyen továbbá az „x” az a vízszintes koordináta tengely, amely a térerősség egyenesével párhuzamos. Ezzel a tehetetlenségi erőteret potenciálja:

$$U = \pm a x \quad (3.4)$$

Az általános fizikából ismert, hogy gyorsuló rendszerben lép fel a tehetetlenségi erőteret és ennek térerőssége éppen ellentétes a gyorsulással. A potenciál fenti kifejezésében pedig akkor kell pozitív előjelet használni, ha a térerősség értelme ellentétes az „x” tengely pozitív irányításával. Ez fizikailag úgy fogalmazható, hogy ebben az esetben növekvő „x” értékekhez növekvő helyzeti energia tartozik. Az előjelek választása tehát – értelemszerűen – a nehézségi erőteretnél részletesen bemutatottak szerint kell történnjen.

Vizsgáljuk meg végül a centrifugális erőteret. Ebben az esetben egy olyan polár (henger) koordináta rendszert kell definiálni, melynek „r” tengelye a forgásponttól kifelé mutat. Ebben az esetben az egységnyi tömege ható centrifugális erő: $r\omega^2$, ezzel a potenciál számítása (3.2 szerint):

$$U = -\int_0^r r' \omega^2 dr' = -\frac{r^2 \omega^2}{2} \quad (3.5)$$

A centrifugális erőteretben tehát csak a negatív előjel használata értelmes, mivel itt a koordináta tengely („r”) irányítása azonos a térerősség irányításával: mindkettő kifelé mutat. A fenti kifejezés megfelel annak a konvenciónak, hogy mivel a potenciál abszolút értéke lényegtelen, csak a potenciál-különbség fontos, szokás szerint az origóban a potenciál értékét nullának választjuk. A centrifugális erőteret esetében ez azt is jelenti, hogy a legnagyobb potenciál (a forgáspontban, azaz az origóban) nulla, és kifelé, az „r” tengely mentén csökkenő potenciálok egyre kisebb negatív számok.

A potenciálokat szabad összegezni (szuperponálni), ezért egy összetett feladatban a fenti három erőteret együttes hatása esetén az alábbi eredő potenciál-kifejezés használható:

$$U = \pm g z \pm a x - \frac{r^2 \omega^2}{2} \quad (3.6)$$

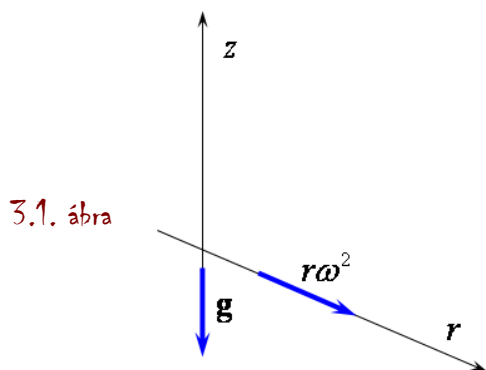
A fenti kifejezésben – amit számos feladat megoldásában kell használni – az előjelek két tag esetében határozatlanok: azért, mert az előjel attól függ, hogy a feladatot megoldó személy milyen koordináta rendszert választ. Vagyis – ebben az esetben is – egy-egy feladat megoldásában az (alkalmas) koordináta rendszer választása nagyon fontos, és az első lépések egyike kell legyen.

Mintafeladat

Az erőterek és ezen belül a potenciális erőterek több tudományterületen játszanak igen fontos szerepet – így az áramlástanban is igen nagy a jelentőségük. A gyakorlati problémáknál szinte mindig jelen van valamely erőter – legfeljebb, indokolt esetben elhanyagoljuk az erőter, erőterek hatásait. Az itt bemutatott példa ugyan nem áramlástanban van – az itt kapott eredmények azonban egyes áramlástan feladatok megoldásának nélkülözhetetlen részét képezik. (Itt csak egy példa következik, természetesen ezen a példán túl számos más, fontos kérdés is feltehető!)

Feladat: határozza meg a gravitációs és centrifugális erőter együttes jelenléte esetén kialakuló, ekvipotenciális felületek egyenletét!

Megoldás: első lépésben válasszunk koordináta rendszert (3.1. ábra):



Ebben a koordináta rendszerben a „z” tengely a nehézségi gyorsulás értelmével ellentétesen, felfele mutat. A henger koordináta rendszer „r” tengelye pedig a középpontból kifelé mutat – ennél az irányításnál a térerősség és a tengely pozitív irányítása azonos.

A példa hengersizmetrikus jelenséget vizsgál, így harmadik tengelyre nincs szükség.

A korábbiakban meghatározott, általános potenciál kifejezés (3.6) erre az esetre egyszerűsítve az alábbi formában írható fel:

$$U = +g z - \frac{r^2 \omega^2}{2} \quad (3.7)$$

Az ekvipotenciális felületek mentén a potenciál állandó, a keresett egyenletünket az $U = \text{áll.}$ kifejezés határozza meg. Tekintsük az egyszerűség kedvéért először azt az esetet, amikor az állandó nulla:

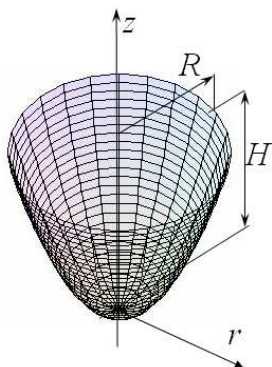
$$0 = g z - \frac{r^2 \omega^2}{2} \Rightarrow z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad (3.8)$$

Általában, ha az állandó nem nulla, akkor a keresett ekvipotenciális felületek egyenletének általános alakja:

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} + \text{állandó} \quad (3.9)$$

A kapott egyenlet – (3.9) – síkban parabola, a henger koordináta rendszerben forgási paraboloid (felület). Ilyen lesz például a nehézségi erőterben forgó, folyadékot tartalmazó edényekben a folyadék felszíne (3.2. ábra – feltéve, hogy a (3.8) kifejezésben az állandó értékét nullának választjuk).

3.2. ábra



További feladatként számítsuk ki a 3.2. ábrán látható forgási paraboloid térfogatát. (Vagyis egyszerűen fogalmazva az a kérdés, hogy mennyi folyadék önthető az ábrán látható „edény”-be?)

A konkrétan tekintett esetben a felület egyenlete (a polárszögtől független):

$$z = \frac{r^2 \omega^2}{2g} \quad \left(\text{és} \quad H = \frac{R^2 \omega^2}{2g} \right) \quad (3.10)$$

A teljes térfogatot az elemi henger-térfogatok integrálásával (összegzésével) határozhatjuk meg:

$$V = \int_0^R (2\pi r dr) (H - z) = \int_0^R (2\pi r dr) \left(H - \frac{r^2 \omega^2}{2g} \right) = 2\pi \int_0^R \left(Hr - \frac{r^3 \omega^2}{2g} \right) dr \quad (3.11)$$

Az integrálás elvégzése után kapott primitív függvény, (3.10)-et is figyelembe véve:

$$V = 2\pi \left[H \frac{r^2}{2} - \frac{r^4 \omega^2}{8g} \right]_0^R = 2\pi \left[H \frac{R^2}{2} - \frac{R^4 \omega^2}{8g} \right] = 2\pi \left[H \frac{R^2}{2} - H \frac{R^2}{4} \right] = \frac{H R^2 \pi}{2} \quad (3.12)$$

Arra az érdekes eredményre jutottunk, hogy a forgási paraboloid belső térfogata egy „ R ” sugarú, „ H ” magasságú henger térfogatának éppen a felével egyenlő. Ez a henger éppen érinti a forgási paraboloidot. A térfogat felezése azt jelenti, hogy ha a paraboloidot eltávolítjuk a hengerből, akkor a visszamaradó térfogat éppen annyi lesz, mint a paraboloid belső térfogata volt. Ezt a tényt számos hidrosztatika feladat megoldásában lehet (és kell) alkalmazni.

A derivált tenzort a (2.6) egyenlettel határoztuk meg, bevezetésével a közeg részecskéinek merevtestszerű elmozdulásait és a deformációit (hosszváltozás vagy dilatáció és szögtorzulás vagy diszorzió) írjuk le. A derivált tenzort – a szakirodalomban általában alkalmazott módon – egy szimmetrikus (\mathbf{D}_S) és egy ferdén szimmetrikus (\mathbf{D}_A) tenzor összegére bonthatjuk fel:

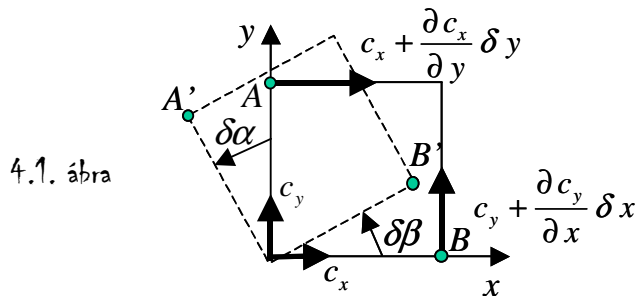
$$\mathbf{D} = \mathbf{c} \circ \nabla^T = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{D}_S + \mathbf{D}_A; \quad (4.1)$$

ahol: $\mathbf{D}_S = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)$ – alakváltozási-sebesség tenzornak is nevezzük;

és $\mathbf{D}_A = \frac{1}{2} (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T)$ – örvénytenzornak is nevezzük.

A fenti felbontás nyilvánvalóan kölcsönösen egyértelmű. A derivált tenzor egészében a konvektív gyorsulás számításában szerepel. Konvektív gyorsulás (5.1. és 5.2. ábra) származhat merevtestszerű forgásból és származhat deformációból. A derivált tenzor ferdén szimmetrikus része (\mathbf{D}_A) a forgással kapcsolatos gyorsulás számításához szükséges. A szögsebesség értelmezéséhez vizsgáljuk a 4.1 ábrán látható, kis téglalapot, illetve annak $\delta\alpha$ valamint $\delta\beta$ szöggel történő elfordulását.

Az első szögelfordulás negatív előjelet kell kapjon, mivel ott a pozitív sebesség negatív elforduláshoz vezet.



4.1. ábra

Az ábrán a pozitív forgás következtében az A pont δt idő alatt az A'-be, a B pont pedig a B'-be mozdul el. Ezek szerint felírható, hogy:

$$\delta\alpha = - \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} \delta y \delta t \right) / \delta y; \quad \text{és:}$$

$$\delta\beta = \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} \delta x \delta t \right) / \delta x.$$

Az eredő szögsebesség számításához vegyük a két szögelfordulás átlagát, osszuk el δt -vel és tekintsük a $\delta t \Rightarrow 0$ határértéket. Ennek a levezetésnek az eredménye – nyilvánvalóan – a szögsebesség “z” irányú összetevője lesz:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right); \quad (4.2)$$

Ezt a gondolatmenetet minden további nélkül meg lehet ismételni az x és az y tengely körüli szögsebesség összetevőkre is. Mindössze a jobsodrású koordináta rendszerekben értelmezett pozitív elfordulási irányt kell szem előtt tartani. Végeredményben a szögsebességre a következő kifejezést kapjuk:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} (\partial c_z / \partial y - \partial c_y / \partial z) / 2 \\ (\partial c_x / \partial z - \partial c_z / \partial x) / 2 \\ (\partial c_y / \partial x - \partial c_x / \partial y) / 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{c}; \quad (4.3)$$

(4.3) felírásakor – figyelembe véve (2.5)-öt – megkapjuk a szögsebesség és a sebességtér rotációja közötti kapcsolatot: a sebességtér rotációja a kontinuum helyi szögsebességének kétszerese. Ezt a rotációt egyes esetekben örvényességnek is nevezik.

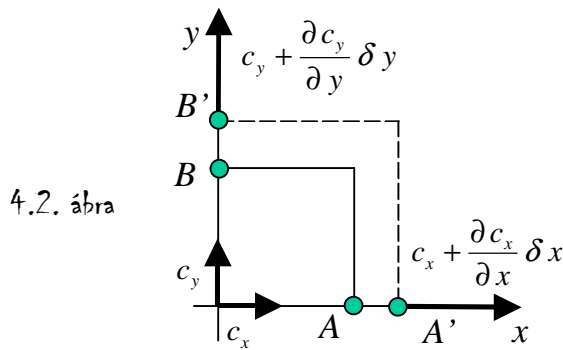
Számítsuk ki a derivált tenzor ferdén szimmetrikus részét, illetve ennek a sebességgel való szorzatát. Ekkor a következő eredményre jutunk:

$$\mathbf{D}_A \mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}; \quad (4.4)$$

A derivált tenzor ferdén szimmetrikus részével történő szorzás tehát azonos a szögsebességgel balról történő vektori szorzással, ezért nevezzük \mathbf{D}_A -t örvénytenzornak (is). Ha a fenti szorzatba a szögsebesség helyére a rotáció vektort írjuk, akkor az általános mechanikából jól ismert, Coriolis gyorsulás kifejezéséhez jutunk:

$$\mathbf{a}_c = \text{rot } \mathbf{c} \times \mathbf{c} = 2 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{c}; \quad (4.5)$$

A derivált tenzor másik, szimmetrikus részének (\mathbf{D}_S) – mivel a konvektív gyorsulás merev testszerű mozgásból és deformációkból származik – a fizikai tartalma a deformációkkal kell kapcsolatos legyen, ezért is nevezzük ezt a rész tenzort alakváltozási-sebesség tenzornak. Tekintsük először a hosszváltozást – azaz a dilatációt.



4.2. ábra

A 4.2. ábrán feltüntetett A pont δt idő alatt az A'-be, a B pont pedig a B'-be mozdul el. Az x és az y tengely mentén bekövetkező, hosszváltozás:

$$\delta_x = \frac{\partial c_x}{\partial x} \delta x \delta t; \quad \text{és:}$$

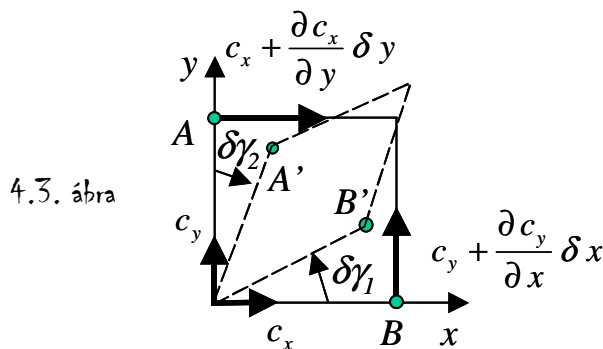
$$\delta_y = \frac{\partial c_y}{\partial y} \delta y \delta t.$$

A „z” tengely menti hosszváltozás értelemszerűen, a fenti kifejezésekhez hasonlóan írható fel. Osszuk el a fenti kifejezéseket rendre δx -szel, δy -nal és a z tengely menti hosszváltozás kifejezését δz -vel; ezek lesznek a fajlagos (relatív) hosszváltozások.

Számítsuk ki a hosszváltozási sebességeket (ez egyszerűen a δt - vel való osztás és a δt tart nullához határátmenet képzését jelenti):

$$\dot{\delta}_x = \frac{\partial c_x}{\partial x}; \quad \dot{\delta}_y = \frac{\partial c_y}{\partial y}; \quad \dot{\delta}_z = \frac{\partial c_z}{\partial z}; \quad (4.6)$$

Tekintsük másodsorra a szögtorzulást, a disztorziót:



4.3. ábra

$$\delta \gamma_1 = \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} \delta x \delta t \right) / \delta x; \quad \text{és:}$$

$$\delta \gamma_2 = \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} \delta y \delta t \right) / \delta y.$$

Ezek összege:

$$\delta \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) \delta t$$

A 4.3. ábrán feltüntetett A pont δt idő alatt az A' -be, a B pont pedig a B' -be mozdul el. A „z” tengely körüli szögtorzulás a két részre.

A szögtorzulások a sebesség változásnak megfelelő előjellel rendelkeznek, ezért kell őket összegezni. Az „xy” index pedig azt fejezi ki, hogy ez a szögtorzulás az „x-y” síkban jön létre. A szögtorzulási sebességet a δt -vel való osztás és a $\delta t \Rightarrow 0$ határérték-képzés után kapjuk.

Írjuk fel mindhárom, lehetséges szögtorzulási sebességet:

$$\dot{\gamma}_{xy} = \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right); \quad \dot{\gamma}_{xz} = \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right); \quad \dot{\gamma}_{yz} = \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \right); \quad (4.7)$$

Határozzuk meg a derivált tenzor szimmetrikus részét:

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial c_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_z}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\delta}_x & \frac{\dot{\gamma}_{xy}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{xz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{yx}}{2} & \dot{\delta}_y & \frac{\dot{\gamma}_{yz}}{2} \\ \frac{\dot{\gamma}_{zx}}{2} & \frac{\dot{\gamma}_{zy}}{2} & \dot{\delta}_z \end{bmatrix}; \quad (4.8)$$

Vagyis a (4.8) kifejezéssel adott tenzor rész a főátlójában a hosszváltozási sebességeket, a további elemeiben pedig a szögtorzulási sebességeket tartalmazza. A szögtorzulási sebességek indexeinek felcserélése az adott összeg tagjainak felcserélését jelenti, ezért ezek az elemek azonosak, vagyis az így felírt tenzor valóban szimmetrikus.

Határozzuk meg az alakváltozási-sebesség tenzor főátlóbeli elemei összegének fizikai tartalmát. Számítsuk ki ezért az előző példákban szereplő, δx , δy és δz élhosszúságú téglalapot térfogat változásának sebességét. Határozzuk meg először a térfogat változást:

$$\Delta(\delta V) = [\delta x + \Delta(\delta x)][\delta y + \Delta(\delta y)][\delta z + \Delta(\delta z)] - \delta x \delta y \delta z; \quad (4.9)$$

Hagyjuk el a másod- és harmadrendűen kicsi tagokat és osszuk el az egyenlet mindkét oldalát a kiinduló térfogattal:

$$\frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} = \frac{\Delta(\delta x)}{\delta x} + \frac{\Delta(\delta y)}{\delta y} + \frac{\Delta(\delta z)}{\delta z}; \quad (4.10)$$

A fenti egyenlet mindkét oldalát osszuk el δt -vel és számítsuk ki a $\delta t \Rightarrow 0$ határátmenetet. A jobb oldalon rendre az egyes relatív hosszváltozási sebességek jelennek meg, a végeredmény a következő lesz:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\Delta(\delta V)}{\delta V} \right] = \dot{\delta}_x + \dot{\delta}_y + \dot{\delta}_z = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = \nabla^T \mathbf{c} = \text{div } \mathbf{c}; \quad (4.11)$$

Eszerint tehát a relatív térfogat változási sebesség, ami a derivált tenzor szimmetrikus részének főátlójában álló elemeinek összege, éppen a sebességtér adott pontban vett divergenciájával egyenlő. A derivált tenzor szimmetrikus részének többi eleme, a szögtorzulási sebességek, a későbbiekben – más alkalmazások mellett – a sűrűlódás tárgyalásában, a feszültség tenzor felírásában játszik majd döntő szerepet.

Mintafeladat

Az az áramlástan kurzus, amely számára ez az előadás vázlat készült, bevezető jellege miatt nem tárgyalja, nem tárgyalhatja elegendő mélységben a derivált tenzorral kapcsolatos ismereteket – ezért gyakorlati feladatra nem érdemes példát bemutatni. Erről a területről elméleti kérdések származhatnak, azok is – általában – a gyorsulással kapcsolatban fordulnak elő, vagyis a megválaszolásukhoz más, későbbi (pl. az 5. fejezet) ismertett tananyag is szükséges. Egy példa: „*Mutassa meg: mely gyorsulásformában és hol fordul elő a szögtorzulási sebesség?*”

Erre és az ehhez hasonló kérdésekre a választ külön nem szükséges kidolgozni, mivel az a leírt elméleti anyagban megtalálható. Ez egyébként általában is igaz: az elméleti kérdésekre adandó válaszok legalább elemeiben megtalálhatók a jegyzetben – legfeljebb ezen elemek a jegyzettől kicsit eltérő kombinációjáról lehet szó.

A tananyag iránt mélyebben, a vizsgakövetelményeken túlmenően érdeklődő hallgatók ezekről a kérdésekről bőséges ismereteket általában az irodalomjegyzékben felsorolt munkákban, feladatokat a [7] példatár 12. „Kinematika” című fejezetében találhatnak.

Az áramlástan egyik nagyon fontos bevezető fejezete a kinematika. Ebben az előadás vázlatban csak az Euler féle szemléletmóddal foglalkozunk. Ebben az esetben egy sebesség-teret adunk meg, amely a teret folytonosan kitöltő kontinuum sebességét írja le:

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{r}, t); \quad (5.1)$$

Az **áramvonal** a sebességmező vektorainak egy, adott pillanatban vett burkoló görbéje – az áramvonal ívelemmel ($d\mathbf{s}$) tehát a sebesség vektor párhuzamos, azaz:

$$\mathbf{c} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}; \quad (5.2)$$

Az (5.2)-beli vektor szorzat kifejtése alapján megállapíthatjuk, hogy a sebesség összetevők és a megfelelő ívelem összetevők aránya a következő:

$$c_x : c_y : c_z = dx : dy : dz; \quad (5.3)$$

A **pályavonal** egy (kijelölt) elemi folyadékrezecske útja. Itt elvileg a kontinuum egy elemi részecskéjéről van szó, aminek a mérete tetszőleges pozitív számnál is kisebb, vagyis ez egy matematikai értelemben infinitezimális részecske. Kevésbé pontosan néha a tényleges fizikai részecske útját is pályavonálnak nevezik.

A **nyomvonal** az a vonal, amely mentén, egy pillanatban a tér egy adott pontján addig áthaladt (elemi) részecskék sorakoznak. Ilyen vonalat láthatunk pl. egy szélcsatorna vizsgálat esetében, amikor az áramlásba egy ponton füstöt vezetünk be.

Az áram-, pálya- és nyomvonal stacionárius áramlás esetében – olyan áramlásban, ahol a sebesség az időben nem változik – azonos. Az áramlások stacionaritása vagy időállósága függhet a megfigyelő nézőpontjától (a vizsgálatához felvett koordináta rendszertől). A vizsgálatokhoz szükséges koordináta rendszert tehát kellő figyelemmel érdemes kiválasztani.

Amennyiben az (5.1) kifejezéssel adott sebességtér a tér egy-egy pontjához pontosan egy sebességet rendel, akkor a tér ezen pontjaiban szintén egy és csak egy áramvonal haladhat át; azokban a pontokban, ahol a sebesség többértékű, több áramvonalat is találunk. Ezeket a pontokat **szinguláris** pontoknak nevezzük. Ilyen szinguláris pont például egy forrás vagy egy nyelő, ahol végtelen sok sebesség és áramvonal értelmezhető. Az áramvonalak esetenként áramfelületeket vagy áramcsöveket alkothatnak – ezeket kinematikai alakzatoknak is nevezük. Síkáramlások és egyméretű áramlások esetében az áramvonalak alkalmazása nagyon fontos és érdekes eredményekre vezet.

Az **örvényesség** a sebességtér rotációja, meghatározása az általunk általában alkalmazott Descartes féle derékszögű koordináta rendszerben (2.5) szerint lehetséges. A rotáció, amint azt az elnevezése is mutatja, a folyadéktér forgásával kapcsolatos mennyiség (a pillanatnyi szögsebesség kétszerese). Az áramvonalhoz hasonlóan, azokat a vonalakat, amelyek egy adott pillanatban az örvényesség burkoló görbéi, örvényvonalnak nevezzük – ekkor tehát az örvényesség párhuzamos az örvényvonal ívelem vektorával:

$$\text{rot } \mathbf{c} \times d\mathbf{s} = \mathbf{0}; \quad (5.4)$$

Az örvényvonalakból – az áramvonalakhoz hasonlóan – örvényfelületeket és örvénycsöveket lehet összeállítani. Ez utóbbi alakzatok fontos szerepet játszanak az örvénytételek megfogalmazásánál, illetve bizonyításánál.

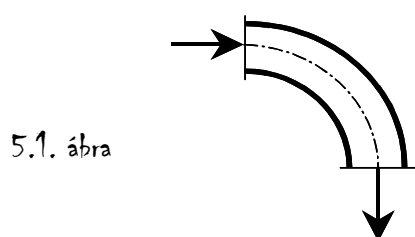
Az (5.1) típusú sebességtér egy, általában térben és időben változó fizikai teret ad meg, azaz a sebesség a hely és az idő függvénye; a gyorsulások meghatározásánál a tér- illetve idő szerinti megváltozását valamint ezek összegét kell figyelembe venni. A térbeli változás alapján számított deriváltat idegen szóval konvektív, az időbeli változás alapján számolt deriváltat lokális, a kettő összegét teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulásnak nevezzük el. Tekintettel arra, hogy az Euler féle tárgyalásmódban a közegek további jellemzői (nyomás, sűrűség, hőmérséklet stb.) szintén fizikai mezőként adottak, a sebesség változásával kapcsolatban tett megállapítások általánosíthatók. Ezek a sebességtérhez hasonlóan lokális, konvektív és teljes deriváltakkal rendelkeznek. A lokális és konvektív derivált rögzített helyen illetve időpontban tekintendő, így ezek a közeggel nem mozognak együtt – ezek nyitott rendszerre vonatkoznak. Ezzel szemben a teljes derivált a közeg egy pontjára vonatkozik, vagyis együttmozgó, azaz zárt rendszerre vonatkozó deriváltat jelent. Ezért nevezik még anyagi-, vagy materiális deriváltaknak is.

A sebesség idő szerinti megváltozása, a **teljes gyorsulás** az alábbi módon írható fel:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + (\mathbf{c} \circ \nabla^T) \mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{D}\mathbf{c}; \quad (5.5)$$

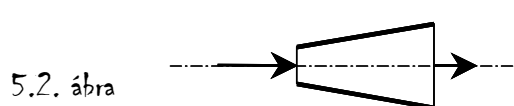
Az (5.5) kifejezésben, a második egyenlőségjel utáni második tagban, a zárójelben a sebesség és a nabla vektor-operátor diadikus szorzata szerepel, ezt derivált tenzornak nevezzük (jele a „**D**” betű). Bevezetése a konvektív gyorsulás elemeinek fizikai értelmezését teszi szemléletessé; a közeg-részek forgására és deformációjára vonatkozó, korábban bemutatott (4. fejezetben) információkat hordozza. Az (5.5) egyenlet adja meg tehát a közeg gyorsulásait: a bal oldalon a **teljes, totális** vagy **szubsztanciális** gyorsulás áll, a jobb oldalak mindegyikében az első tag a **lokális**, a második a **konvektív** gyorsulás.

Ezek a gyorsulás-típusok eltérnek a merev testek mechanikájában szereplő gyorsulásoktól, ezért fizikai értelmezésük céljából néhány példát mutatunk be. Lokális gyorsulás akkor létezik, ha a sebesség egy pontban, az idő függvényében változik. Tipikus példa erre egy (szakaszonként állandó keresztmetszetű) csővezeték, amelyben időben változó folyadékmennyiség halad (pl. vízvezeték stb.) A lokális gyorsulást tehát egy adott helyen, valamely t és $t + \Delta t$ pillanatban mért sebességkülönbséggel szemléltethetjük.



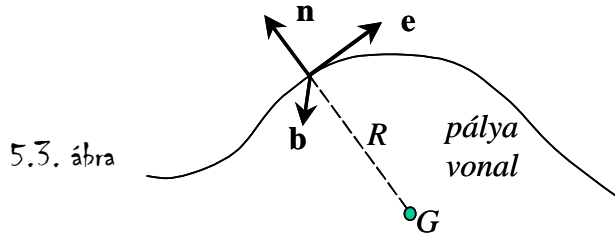
A konvektív gyorsulás a sebesség irányának vagy nagyságának adott pillanatbeli megváltozásából származik. Az 5.1. ábrán a sebesség irányváltozása figyelhető meg: a könyöksőben (az egyéb változásoktól most eltekintve) a sebesség iránya a belépéstől a kilépésig, pontról pontra változik.

A sebesség abszolút értékének - a sebesség nagyságának változására szemléletes példa egy szűkülő (konfúzor) vagy bővülő (diffúzor) csőidombeli, időben állandósult áramlás. Ezekben a csőidombokban a sebesség iránya a középvonal mentén nem változik, a nagysága azonban – az 5.2. ábra tanúsága szerint – igen. Konvektív gyorsulás ezen a két, igen leegyszerűsített példán kívül természetesen más esetben is létrejön.



A teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulás az eddig bemutatott, kétféle gyorsulás összege (ha az egyik gyorsulástípus nulla, akkor a teljes gyorsulás azonos a másik, nem nulla gyorsulás-résszel).

A pályavonal egy, kijelölt részecske útja. A pályavonalhoz rendelhető az érintő (\mathbf{e}), a normális (\mathbf{n}) és a binormális (\mathbf{b}) egység-vektorból álló kísérő triéder. Ezek jobb rendszert alkotnak. A továbbiakban szorítkozzunk az időálló (stacionárius) áramlások esetére. Ekkor egyébként az áramvonal, a pályavonal és a nyomvonal azonos.



A kísérő triéder által kifeszített koordináta rendszer alkalmazása azért jelent egyszerűsítést, mert ebben a rendszerben a sebesség érintő irányú, a másik két összetevője azonosan nulla. A stacioneritás miatt csak konvektív gyorsulás létezik és a konvektív gyorsulásnak is csak érintő és normális irányú összetevője van, a binormális irányban gyorsulás sincs.

Az érintő irányú konvektív gyorsulás, a sebességgel, mint skalár mennyiséggel számolva:

$$a_e = c \frac{\partial c}{\partial e}; \quad (5.6)$$

A konvektív gyorsulás másik összetevője a pálya görbületétől is függő centripetális gyorsulás, ennek az általános mechanikából ismert alakja:

$$a_{cp} = -\frac{c^2}{R}; \quad (5.7)$$

Az áramlástanban a **konvektív gyorsulás** többféle alakját használjuk. A következőkben talán a legelterjedtebben használt alakot vezetjük be. Bontsuk fel a derivált tenzort a következő módon:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^T + (\mathbf{D} - \mathbf{D}^T); \quad (5.8)$$

A felírás helyessége nyilvánvaló. A konvektív gyorsulást a sebesség és a derivált tenzor szorzata szolgáltatja. Szorozzuk a fenti egyenlet jobb oldalának első tagját a sebességgel:

$$\mathbf{D}^T \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \frac{\partial c_x}{\partial x} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial x} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial x} c_z \\ \frac{\partial c_x}{\partial y} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial y} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial y} c_z \\ \frac{\partial c_x}{\partial z} c_x + \frac{\partial c_y}{\partial z} c_y + \frac{\partial c_z}{\partial z} c_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \\ \frac{\partial}{\partial y} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \\ \frac{\partial}{\partial z} (c_x^2 + c_y^2 + c_z^2) \end{bmatrix} = \mathbf{grad} \left(\frac{\mathbf{c}^T \mathbf{c}}{2} \right) = \mathbf{grad} \frac{c^2}{2}; \quad (5.9)$$

Az (5.9) egyenlet jobb oldalán a $\mathbf{c}^T \mathbf{c}$ szorzatot hagyományosan c^2 -nek szokás írni; a skaláris vagy belső szorzattal történő felírás közvetlenül mutatja a sebességvektor négyzetének kiszámítási módját. A sebesség négyzetének gradiensét például a Bernoulli egyenlet levezetésekor használjuk majd fel.

A $(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) \mathbf{c}$ jelentése (egyszerű számolással ellenőrizhető):

$$(\mathbf{D} - \mathbf{D}^T) \mathbf{c} = \mathbf{rot} \mathbf{c} \times \mathbf{c}; \quad (5.10)$$

Ezt a szorzatot fordított sorrendben szokás felírni, hogy zárójel nélkül is rögtön látni lehessen: a rotáció operátor a sebességre vonatkozik. A totális vagy szubsztanciális gyorsulás igen gyakran alkalmazott alakja tehát a következő lesz:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad}\left(\frac{c^2}{2}\right) - \mathbf{c} \times \mathbf{rot}\mathbf{c}; \quad (5.11)$$

A totális gyorsulás tehát a lokális gyorsulás (a jobb oldal első tagja) és a konvektív gyorsulás (a jobb oldal második és harmadik tagja) összegével egyenlő.

Mintafeladat

A kinematika az áramlástan fontos fejezete, nagy a jelentősége a gyakorlati feladatok megoldásában is. Ennek az áramlástan kurzusnak a sajátosságai miatt főként elméleti kérdések adódnak erről a területről. Példaként tekintsük a következő kérdést:

Milyen gyorsulás fajtákat ismer? Határozza meg ezek tenzor-, vektor formában történő számításának módját! Mutasson rá ezek fizikai tartalmára, különös tekintettel egy-egy részecske lehetséges mozgásformáira.

Ennek a feladatnak a konkrét megoldását külön nem ismertetjük, hiszen a feltett kérdésekre adandó válasz a korábbi anyagban olvasható – a feladat mindössze a válasz elemeinek összegyűjtése.

A tananyag iránt mélyebben, a vizsgakövetelményeken túlmenően érdeklődő hallgatók ilyen típusú feladatokat a [7] példatár 12. „Kinematika” című fejezetében találhatnak.

A fizika megmaradási elveit zárt rendszerekre mondjuk ki. Ezzel szemben a mérnöki gyakorlatban meglehetősen ritka a valamilyen értelemben (pl. anyag, mozgásmennyiség, energia vagy perdület átadás szempontjából) zárt rendszer. A transzport- vagy mérleg-egyenlet segítségével, a rendszerhatárokon átlépő áramok (pl. anyag, mozgásmennyiség, energia vagy perdület áram) figyelembe vételével nyílt rendszerekre is felírhatók a megmaradási elveken alapuló egyenletek. Ezek a matematikai egyenletek (is) szükségesek a modellezendő fizikai folyamatok leírásához.

Tekintsünk egy, egyszeresen összefüggő, zárt térfogatot (V), amelyet az A felület határol. A mérleg egyenlet integrál alakja a következőképpen írható:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_A f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV \quad (6.1)$$

ahol:

- $f(\mathbf{r}, t)$ — skalár-vektor függvény (pl. a folyadék sűrűsége, stb.);
- $\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV$ — a vizsgált intenzív jellemző ($f(\mathbf{r}, t)$) idő szerinti teljes, totális vagy szubsztanciális megváltozása, a teljes V felett;
- $\int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV$ — a vizsgált intenzív jellemző ($f(\mathbf{r}, t)$) lokális vagy idő szerinti megváltozása, a teljes V felett;
- $\int_A f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}^T \mathbf{dA}$ — a vizsgált intenzív jellemző ($f(\mathbf{r}, t)$) konvektív vagy hely szerinti megváltozása (rögzített pillanatban), a teljes V felett;
- $\int_V q(\mathbf{r}, t) dV$ — a vizsgált térfogatban működő források hatása.

(A \mathbf{c}^T szimbólum a sebesség transzponáltját jelenti, illetve a sebesség transzponáltja és az itt röviden vektornak jelölt felületelem – amely pontosabban a felületelem és a felület normál vektorának szorzata – skaláris vagy belső szorzatát jelöli.)

A Gauss-Osztrogradszkij tétel segítségével a mérleg- vagy transzport egyenlet integrál alakja a következő módon alakítható át úgy, hogy benne már csak térfogati integrálok szerepeljenek:

$$\frac{d}{dt} \int_V f(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}) dV = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV \quad (6.2)$$

Mivel az integrálási tartomány a fent kimondott feltételeken túl tetszőleges, azért az integrálandó függvényeknek kell egyenlőnek lenni, ezzel a mérleg- vagy transzport-egyenletet differenciálegyenlet alakjában kapjuk:

$$\frac{df(\mathbf{r}, t)}{dt} = \frac{\partial f(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(f(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}) = q(\mathbf{r}, t) \quad (6.3)$$

A transzport vagy mérleg egyenlet olyan elméleti alap-egyenlet, melyre – e kurzus keretében – legfeljebb elméleti kérdés irányulhat.

A fizika általunk vizsgált területét, az áramlást az anyag-, mozgásmennyiség-, energia- és a perdület megmaradás elvére építjük fel. Ezek alapos, korrekt ismerete tehát nélkülözhetetlen. Ez a korrekt ismeret a következő, négy elemből áll:

- a szóban forgó egyenlet hibátlan ismerete;
- annak a megmaradási elvnek, illetve teljesülése konkrét formájának ismerete, amelyre a szóban forgó egyenlet épül;
- az egyenlet tagjainak fizikai értelmezése – mi a fizikai jelentése az egyes tagoknak;
- a szóban forgó egyenlet érvényességi feltételeinek ismerete.

Az **anyag megmaradás**ának elve (6.1) szerint írható fel, mindössze az általános „ f ” függvény helyére a sűrűséget kell beírunk:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V q(\mathbf{r}, t) dV \quad (7.1)$$

A (7.1) egyenlet az anyag megmaradás elvén alapul és teljesen általános – vagyis nincs az érvényességét korlátozó feltétel. Bal oldala a V térfogatban elhelyezkedő tömeg időbeli teljes megváltozását fejezi ki. Ezt felbontjuk a lokális változás (a választott térfogatbeli tömegváltozás) és konvektív változás (a választott térfogattól ki- és belépő tömegáramok összessége) összegére. A jobb oldal (a harmadik tag) pedig azt mondja ki, hogy ez a megváltozás a keletkező vagy eltűnő anyag mennyiségével egyenlő. Ha olyan folyamatokat vizsgálunk, ahol nincs sem keletkező, sem eltűnő anyag ($q(\mathbf{r}, t) \equiv 0$), továbbá rögtön a teljes megváltozás lokális és konvektív összetevőre bontott alakját tekintjük, akkor a következő kifejezést kapjuk:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_A \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = 0 \quad (7.2)$$

Ha a sűrűség az időben nem változik, akkor (7.2) bal oldali első tagja nulla lesz. Számoljunk továbbá átlagsebességekkel és legyenek ezek a választott felületekre merőlegesek – akkor egy áramcső ki (K) és belépő (B) felületére kapjuk:

$$\rho_B c_B A_B = \rho_K c_K A_K = \dot{m} = \text{áll.} \quad \text{vagy a } \rho = \text{áll.} \text{ esetben: } c_B A_B = c_K A_K = \dot{V} = \text{áll.} \quad (7.3)$$

Ezek a folytonosság törvényének jól ismert és általánosan használt alakjai, illetve ezek integrál egyenletek. A folytonosság törvényét differenciál-egyenletként is felírhatjuk:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \mathbf{c}) dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{c}) = 0 \quad (7.4)$$

Fizikai szempontból a lokális tag a választott térfogatbeli tömegváltozást (vagy a differenciál egyenletnél az egységnyi térfogatbeli tömegváltozást) jelenti. A konvektív tag pedig a ki- és belépő tömegeket határozza meg. A folytonosság törvényének legfontosabb érvényességi feltétele a (7.2) kifejezéstől kezdődően az, hogy az áramlásban ne legyen sem forrás, sem nyelő.

A **mozgásmennyiség megmaradás**ának elve szintén (6.1) szerint írható fel. Mivel a mozgásmennyiség vektor, ezért a három összetevőre felírt transzport egyenletet összefogva a következőt írhatjuk:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{c}(\mathbf{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho \mathbf{c}}{\partial t} dV + \int_A \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A} = \sum \mathbf{F} \quad (7.5)$$

Vagyis a mozgásmennyiség időegységre eső teljes megváltozása – ami a lokális és konvektív változás összegeként írható fel – egyenlő a kiválasztott V térfogatbeli közegre ható külső erők eredőjével (összegével).

Az általunk vizsgált körben felületi és térfogati erők értelmezhetők. Ezen túl, véges térfogat esetén előfordulhat idegen test is a térfogatban (az ellenőrző felületen belül). Ezek szerint a külső erők a következőképpen írhatók:

$$\sum \mathbf{F} = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV + \mathbf{F} = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T} \quad (7.6)$$

A fenti kifejezés jobb oldalának első tagja a felületi erő, a második tag a térfogati erő és a harmadik tag az első esetben az idegen test folyadéokra gyakorolt ereje (\mathbf{F}), illetve a második esetben a testre gyakorolt erő (\mathbf{T}), amely erő a folyadékra ható erő reakció ereje – ezt mutatja a negatív előjel. Ezen a helyen (is) hangsúlyozzuk, hogy egy vektor-mennyiség előjele mindig fizikai tartalmat hordoz: jelen esetben a \mathbf{T} előtti negatív előjel azt jelenti, hogy ez egy reakció erő.

Az úgynevezett „impulzus tétel” gyakorlati számításokra használatos alakja a (7.7) egyenlet. A bal oldalon a stacionárius, legfeljebb kvázi stacionárius áramlásokra érvényes, időegységre eső mozgásmennyiség változás konvektív része áll. A jobb oldalon az első két tag a felületi erőket jelenti. Ideális közegre a feszültség tenzor egyszerűen írható: $\mathbf{\Pi}_{id} = -p \mathbf{E}$, vagyis csak a nyomást tartalmazza. A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a felületi normális kifele mutat, a nyomásból származó erő ezzel ellentétesen, befelé mutat – ez a felületi erők első tagja. A második tag (\mathbf{S}) a súrlódásból származó erők összefoglaló formája. A harmadik, térfogati integrál a térfogati erőket jelenti – ez gyakran (de nem mindig) a nehézségi erő. A negyedik tag az ellenőrző felületen belül elhelyezkedő idegen testre ható erő.

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A} = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} + \mathbf{S} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T} \quad (7.7)$$

Az impulzus tételt igen gyakran ideális közegre írjuk fel, ebben az esetben az alábbi, igen gyakran használt alakot kapjuk:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A} = - \int_{(A)} p d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T} \quad (7.8)$$

Ez a mozgásmennyiség megmaradására épülő integrál egyenlet, ami valójában a mozgásmennyiség megváltozásáról szól: a mozgásmennyiség annyit változik, amennyi változást a külső erők előidéznek. Érvényességi feltételei pedig a konkrét alakokkal kapcsolatosan a fentiekben olvashatók.

A mozgásmennyiség megmaradására épülő differenciálegyenlet, (7.5)-ből kiindulva és az idegen test hatását kivéve (hiszen az az elemi térfogatban nem lehet), a következőképpen kapható:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\mathbf{r}, t) \mathbf{c} dV = \int_V \mathbf{c} \frac{d}{dt} (\rho dV) + \int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV = \int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV \quad (7.9)$$

és:

$$\int_V \frac{d\mathbf{c}}{dt} \rho dV = \int_{(A)} \mathbf{\Pi} d\mathbf{A} + \int_V \rho \mathbf{g} dV = \int_V (\operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \rho \mathbf{g}) dV \quad (7.10)$$

azaz végeredményben, az integrálandó függvények egyenlőségéből következően:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{\Pi} + \mathbf{g} \quad (7.11)$$

A (7.11) egyenlet jelentése – a feszültség tenzor elemeitől függően – többféle lehet. A sűrűség tárgyalásánál visszatérünk majd erre a kérdésre. Itt, az előzőhöz hasonlóan, ideális folyadék esetére az **Euler** egyenletet mutatjuk be:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g} \quad (7.12)$$

Megjegyzendő, hogy a sebesség azonosan nulla választása esetén (7.12)-ből a hidrosztatika alap differenciál-egyenletét kapjuk. Az Euler egyenlet bal oldalán a teljes vagy totális gyorsulást felbonthatjuk a lokális és a konvektív gyorsulás összegére. Ezt részletesebben a kinematikával foglalkozó részben már bemutattuk. Az egyenlet:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \operatorname{grad} \left(\frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \mathbf{g} \quad (7.13)$$

Az Euler egyenlet, az impulzus tételhez hasonlóan a mozgásmennyiség megmaradás elvére épül, és azt fejezi ki, hogy a mozgásmennyiség időegységre eső megváltozása a külső erők eredőjével egyenlő. Ez az időegységre eső mozgásmennyiség változás konkrétan, a (7.13) bal oldalán a teljes, totális vagy szubsztanciális gyorsulás, ennek felbontása látható (7.13) középső részében. A jobb oldalon pedig az egységnyi tömegre ható felületi erő, ami a nyomásváltozáson, nyomáskülönbségen alapul és az erők eredő térerősségéből származó, szintén egységnyi tömegre ható térfogati erő összege áll. Ez, nagyon egyszerűen a középiskolából ismert, Newton II. törvényét jelenti, ami szerint: " $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ ".

Az Euler egyenlet legfontosabb érvényességi feltétele az, hogy ideális folyadékra vonatkozik.

Az 5. pontban bevezettük a kísérő triéder fogalmát, illetve meghatároztuk az ott értelmezhető konvektív gyorsulásokat – (5.6) és (5.7) kifejezés. A szintén ott bevezetett, stacioneritási feltétel mellett az Euler egyenlet érintő, illetve a normálvektor irányába a következőképpen írható fel:

$$c \frac{\partial c}{\partial e} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial e} + g_e; \quad \text{és} \quad -\frac{c^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + g_n; \quad (7.14)$$

A (7.14) kifejezés első tagja az érintő irányban, második tagja a normálvektor irányában felírt Euler egyenlet. Az egyenletekben szereplő g_e és g_n az eredő térerősség érintő, illetve normál irányú összetevője.

Az érintő irányú gyorsulás gyakran nulla, vagy elhanyagolható. Hasonlóképpen a térerősség is többször elhanyagolható. Ebben az esetben az Euler egyenlet, a kísérő triéderben felírva, a következő, gyakran használt alakban írható:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d r} = \frac{c^2}{r} \quad (7.15)$$

Az Euler egyenletnek ez az igen egyszerű formája igen hasznos a nyomás változásának megítélésében, görbült áramvonalak esetében. A (7.15) differenciálegyenlet néhány, speciális feladat megoldásában is igen hasznosnak bizonyul.

A (7.13) egyenletet – vagyis az Euler egyenletet – egy áramlás két pontja között integrálva kapjuk az **energia megmaradás** elvére épülő Bernoulli egyenletet:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} \right]_1^2 - \int_1^2 (\mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{c})^T \mathbf{ds} + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{d p}{\rho} - \int_1^2 \mathbf{g}_{II}^T \mathbf{ds} = 0 \quad (7.16)$$

A Bernoulli egyenlet – a levezetésnek megfelelően – egységnyi tömegre vonatkozik. Ezt a továbbiakhoz mindig hozzá kell érteni. A baloldal első tagja a választott két pont közötti, gyorsításra fordítandó munka, vagy a lassulásból származó munkavégző képesség. A második tag a választott pontok közötti mozgási energia különbség. A harmadik tag a forgatásra fordítandó munka, vagy a forgásból származó munkavégző képesség. A negyedik a potenciál különbség. Az ötödik a nyomásnövekedés ellenében végzendő munka, vagy a nyomáscsökkenésből származó munkavégző képesség. Végül a hatodik tag a nem-potenciális erők tererőssége (\mathbf{g}_{II}) ellenében végzendő munka, vagy az abból származó munkavégző képesség.

A Bernoulli egyenlettel kapcsolatban két, nagyon fontos érvényességi feltételt kell kiemelni: a közeg csak ideális lehet – sűrűdéses áramlásra a fenti egyenlet nem alkalmazható és a két, választott pont között nem lehet energia be- vagy elvezetés. Ez utóbbi feltételt jeleníti meg számszerűen a (7.16) jobb oldalán álló nulla szám, másképpen fogalmazva: e nullának a fizikai jelentése az, hogy nem lehet energia be- vagy elvezetés.

Az összenyomható közegek áramlásakor az energia-egyenlet alábbi formáját használjuk:

$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \text{áll.} \quad (7.17)$$

Ez az egyenlet azt mondja ki, hogy az (egységnyi tömeg) kinetikai energiájának és entalpiájának ($c_p T$) összege állandó és (mondjuk) a tartály entalpiával egyenlő. Az egyenlet érvényességéhez – a (7.16) Bernoulli egyenletnél mondott érvényességi feltételeken túl – a potenciálváltozásnak és az örvényességgel kapcsolatos tagnak is vagy nullának, vagy elhanyagolhatóan kicsinek kell lenni. Hasonlóképpen nem lehet jelen nem-potenciális erőtér és az instacioneritás sem engedhető meg.

Az energia megmaradási elvre építve, differenciálegyenlet is bevezethető lenne – e tekintetben azonban csak a szakirodalomra utalunk: ebben a jegyzetben ez az egyenlet a korlátozott tartalom miatt nem kaphatott helyet.

A **perdiület megmaradás** elvére épülő alap-egyenlethez úgy jutunk el, ha a mozgásmenyiség megmaradására épülő, (7.8) egyenlet minden tagját balról vektoriálisan szorozzuk „ \mathbf{r} ”-rel (az „ \mathbf{r} ” az általunk választott koordináta rendszer origójától az integrálásban szereplő pontig tartó helyvektor):

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T d\mathbf{A}) = \int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{\Pi} d\mathbf{A}) + \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g} dV) - \mathbf{r} \times \mathbf{T} \quad (7.18)$$

A baloldalon az időegységre eső perdület-változás található – ez a kiválasztott ellenőrző felületben elhelyezkedő közegre ható, eredő, külső nyomatékkal egyenlő. A jobb oldal első tagja a felületi erők nyomatéka, a második a térfogati erők nyomatéka. A (7.18) egyenlet jobb oldalán, a felületi erők nyomatékának számításánál a nyomás helyett – ez szerepel (7.8)-ban – a feszültség tenzort írtuk vissza – ezt a felírási módot a (7.6) kifejezésben vezettük be.

A harmadik tag pedig a közeg által kifejtett, az esetleges idegen testre ható nyomaték – ezt jelzi (a 7.7 egyenletnél leírtakhoz hasonlóan) a negatív előjel. A (7.18) kifejezés, hasonlóan (7.7)-hez, csak stacionárius, vagy kvázi-stacionárius áramlásra igaz.

A perdület megmaradás elvére épülnek az örvény tételek, de ezekkel külön pontban foglalkozunk. Hasonlóképpen ide tartozik az örvény-transzport egyenlet is, ezzel az egyenlettel azonban e tárgy keretein belül nem tudunk foglalkozni.

Ugyancsak ennek az elvnek a felhasználásával vezethető le az Euler-turbina egyenlet, ezt az egyenletet az áramlástan gépek működésének vizsgálatánál szokás használni, ezzel konkrétan a 19. fejezetben foglalkozunk.

A megmaradási elvekre épülő alapegyenletek megfogalmazása után kimondható az az állítás, amely szerint egy áramlásban feladatban minden megmaradási elvnek teljesülnie szükséges! Ha ez megvalósul, akkor a feladat beilleszthető a jelenleg általánosan elfogadott világképbe. Ha azonban nem teljesülne, akkor ez a jelen áramlásban (fizikai) tudásunk határain túlra mutató okoskodássá lenne: pillanatnyilag nem ismert olyan áramlástan jelenség, amelyre ne vonatkoznának a megmaradási elveink.

(7.18) felírási módjából (is) következik, hogy a perdület megmaradásra épülő vektor egyenlet alternatívája a mozgásmennyiség megmaradásra épülő szintén vektor egyenletnek – vagyis egy feladat megoldásában célszerűen vagy az egyik, vagy a másik alkalmazandó, mivel ezek az egyenletek összefüggenek.

A fentiek tudatában, az áramlásban gyakran használnak ún. „kinematikailag lehetséges” áramlásokat: ezekre alapvetően csak a folytonosság törvényének teljesülését írjuk elő. Példaként említjük, hogy olyan síkáramlásokban, amelyek nullmértékű halmaztól eltekintve örvénymentesek, használhatók a komplex potenciálok (9. fejezet). Ezek az áramlások – megfelelően használva őket – jól használható, fontos gyakorlati eredményekhez vezetnek. Azonban meg nem engedett módon használva őket, súlyos fizikai tévedésekhez is vezethetnek.

Mintafeladatok

A megmaradási elvek igen fontos elméleti alap-kérdések. Jelen áramlásban kurzus esetében tipikusnak tekinthető az alábbi néhány alapkérdés:

Írja fel az impulzus tételt! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenlet legfontosabb érvényességi feltételei?

Írja fel a mozgásmennyiség megmaradásán alapuló differenciál-egyenletet. Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenlet legfontosabb érvényességi feltételei?

Írja fel a folytonosság törvényének differenciálegyenlet és integrálegyenlet alakját! Fogalmazza meg pontosan, hogy milyen megmaradási elvet és hogyan fejez ki ez az egyenlet! Határozza meg minden egyes tag fizikai jelentését! Melyek az egyenletek legfontosabb érvényességi feltételei? – (.....és még több, hasonló jellegű kérdés.)

E a feladatok a konkrét megoldását külön nem ismertetjük, hiszen a feltett kérdésekre adandó válasz a korábbi anyagban olvasható – a feladat legfeljebb a válasz elemeinek összegyűjtése lehet. Gyakorlati feladatokat később ismertetünk.

A folyadékokra, illetve gázokra vonatkozó legegyszerűbb feladat az, amikor, alkalmasan választott koordináta rendszerből nézve a közeg nyugalomban van. Ekkor hidrostatika feladatról beszélünk. A hidrostatika alap differenciál egyenletét az Euler egyenletből (7.12) kaphatjuk, úgy, hogy a sebességet és a gyorsulást is azonosan nullának választjuk:

$$\mathbf{grad} p = \rho \mathbf{g} \quad (8.1)$$

Ez a differenciálegyenlet hasznos az elméleti megfontolások megtételében, illetve a változó sűrűségű közegekre vonatkozó feladatok megoldásában is. Az egyenlet a mozgásmennyiség megmaradás elvén alapul, közvetlenül azt mondja ki, hogy az egységnyi térfogatra ható, nyomásváltozásból illetve térerőből származó erő egyensúlyban van. Az általunk vizsgált minden hidrostatika feladatra érvényes.

Képezzük (8.1) mindkét oldalának rotációját:

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad} p) = 0 = (\mathbf{grad} \rho) \times \mathbf{g} + \rho (\mathbf{rot} \mathbf{g}) \quad (8.2)$$

A (2.8) egyenlet értelmében a baloldal rotációja nulla. Amennyiben a sűrűség állandó ($\rho = \text{áll.}$), akkor azt kapjuk, hogy a térerősség rotációjának is nullának kell lennie. Ez pedig részben azt jelenti, hogy a szóban forgó erőtér csak potenciálos lehet (3. pont), illetve, hogy állandó sűrűségű közeg csak potenciálos erőtérben lehet nyugalomban.

Tegyük fel, hogy az erőtér vagy erőterek potenciálosak. Integráljuk (8.1) mindkét oldalát:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 dU = 0 \quad (\text{itt : } \mathbf{g} = -\mathbf{grad} U) \quad (8.3)$$

Ezzel a hidrostatika alap integrál egyenletének azt az alakját kapjuk, amely változó sűrűségű közeg esetén alkalmazható, ha csak a sűrűség kifejezhető a nyomás függvényeként.

Tegyük fel, hogy a közeg sűrűsége állandó. Integráljuk ismét (8.1) mindkét oldalát:

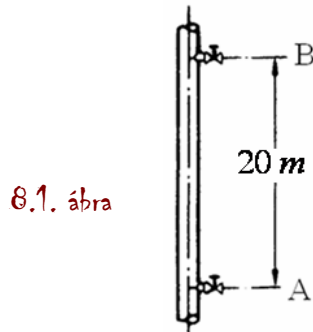
$$p = -\rho U + \text{áll.} \quad (\text{itt : } \mathbf{g} = -\mathbf{grad} U) \quad (8.4)$$

Ezzel a hidrostatika integrált alap-egyenletéhez jutunk. Igaz, hogy ez az egyenlet csak a fenti feltételek esetében alkalmazható, de azért az áramlástan oktatásában alkalmazott, gyakorlati feladatok igen nagy részét ennek az egyenletnek a segítségével kell és lehet megoldani.

A hidrostatika alapvető jelentőségű terület, számos, erre a területre vonatkozó, megoldott feladat található [7] példatár 11. „Hidrostatika” című fejezetében. A következőkben, bevezető segítségként két mintafeladatot oldunk meg.

Mintafeladatok

Feladat: tekintsük a 8.1. ábrán látható, földi nehézségi erőterben elhelyezkedő függőleges gázcső-darabot:

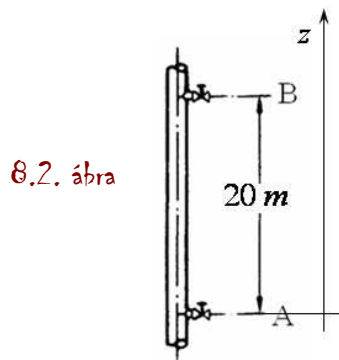


A cső belsejében lévő gáz sűrűsége $\rho_G = 0.7 \text{ kg/m}^3$. Kívül $\rho_L = 1.225 \text{ kg/m}^3$ sűrűségű levegő helyezkedik el.

Az „A” pontban a gáz túlnyomása 500 N/m^2 . Kérdés az, hogy mekkora a gáz túlnyomása a „B” pontban?

Megállapítható, hogy ez a feladat állandó sűrűségű közegre vonatkozó, hidrostatika feladat. Ezért célszerűen (8.4) felhasználásával oldható meg.

Megoldás: a hidrostatika feladatokban első lépésként alkalmas koordináta rendszert kell választani (rendeljük a „ $z=0$ ” értéket az „A” pont szintjéhez):



Írjuk fel ebben a koordináta rendszerben a nehézségi erőter potenciálját:

$$U = g z$$

Írjuk fel (8.4)-et a levegőre:

$$p_L(z) = -\rho_L g z + p_{LA} \quad (\text{ahol } p_{LA} \text{ a levegő nyomása az "A" pontban})$$

Írjuk fel (8.4)-et a gázra is:

$$p_G(z) = -\rho_G g z + p_{GA} \quad (\text{ahol } p_{GA} \text{ a gáz nyomása az "A" pontban})$$

A feladat feltételeiből tudjuk, hogy:

$$p_G(z=0) = p_{GA} \text{ és } p_L(z=0) = p_{LA} \quad \text{különbsége: } p_{GA} - p_{LA} = 500 \text{ N/m}^2 \quad (8.5)$$

Ezek szerint a gázra vonatkozó egyenletből kivonva a levegőre vonatkozó egyenletet, azt kapjuk, hogy:

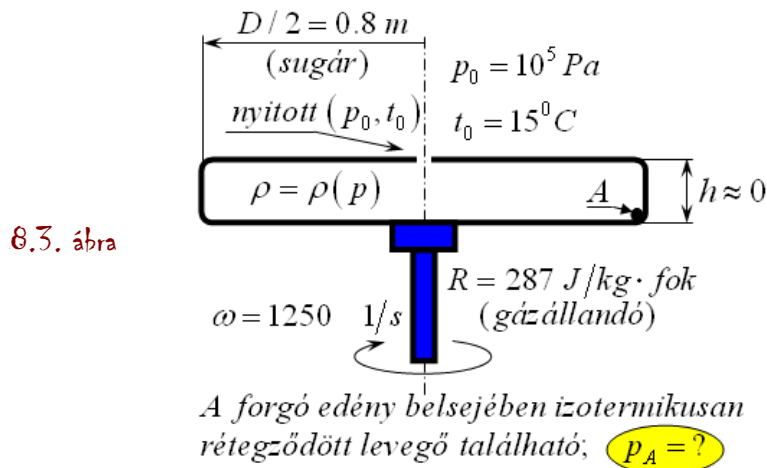
$$p_G(z) - p_L(z) = -(\rho_G - \rho_L) g z + (p_{GA} - p_{LA}) \quad (8.6)$$

Helyettesítsük be a megfelelő számértékeket:

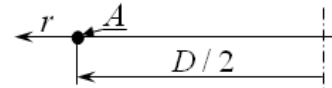
$$p_G(20) - p_L(20) = (1.225 - 0.7) \cdot 9.81 \cdot 20 + 500 \cong 603 \text{ N/m}^2 \quad (8.7)$$

A számításunk alapján arra az érdekes és a gyakorlatban is igen fontos eredményre jutottunk, hogy a gáz túlnyomása a magasság növekedésével növekszik. Ezt a tényt a gázvezetékek karbantartásánál például feltétlenül figyelembe vesszük.

Feladat: tekintsük a 8.3. ábrán látható, elhanyagolható magasságú, forgó edényt:



Vegyük észre, hogy az edényhez rögzített, együttforgó koordináta rendszerben ez hidrostatika feladat. Ezért, koordináta rendszerként elegendő lesz egy, a forgástengelytől induló „ r ” tengely felvétele:



Megoldás: vegyük észre azt, hogy a lényegében nulla magasság miatt a nehézségi erőter hatása elhanyagolható. További fontos információ az, hogy a sűrűség változik (pontosan ezért, a változó sűrűséggel történő számolás miatt választottuk ezt a bemutató feladatot); méghozzá ez a változás izotermikus, vagyis a sűrűség csak a nyomás függvénye!

Válasszuk a fentiekben már meghatározott együttforgó koordináta rendszert. Ebben a rendszerben a potenciál és teljes differenciálja:

$$U(r) = -\frac{r^2 \omega^2}{2}; \quad \text{illetve} \quad dU = \frac{dU}{dr} dr = -r \omega^2 dr \quad (8.8)$$

Válasszuk a megoldáshoz (8.3)-at, ((8.1) potenciális erőterek és változó sűrűség esetében érvényes, integrált alakját):

$$\int_1^2 \frac{dp}{\rho} + \int_1^2 dU = 0 \quad (8.9)$$

A fenti egyenlet alkalmazásához szükséges a sűrűség, mint a nyomás függvénye:

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad \text{és} \quad \frac{p_0}{\rho_0} = RT_0 \Rightarrow \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{p} \quad \text{és} \quad \rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{10^5}{287 \cdot 288} \cong 1.21 \text{ kg/m}^3 \quad (8.10)$$

Helyettesítsünk be (8.9)-be:

$$\frac{p_0}{\rho_0} \int_{p_0}^{p_A} \frac{dp}{p} - \int_0^{D/2} r \omega^2 dr = 0 \Rightarrow \frac{p_0}{\rho_0} \ln \left(\frac{p_A}{p_0} \right) = \frac{(D/2)^2 \omega^2}{2} \quad (8.11)$$

Innen a keresett nyomás már kifejezhető:

$$p_A = p_0 \exp \left[\frac{\rho_0 (D/2)^2 \omega^2}{p_0} \right] = 10^5 \exp \left(\frac{1.21 \cdot 0.8^2 \cdot 1250^2}{10^5} \right) \cong 4.24 \cdot 10^7 \text{ Pa} \quad (8.12)$$

A végeredmény azt (is) mutatja, hogy a centrifugális erőterben meglehetősen nagy nyomás-növekedés érhető el.

A korábbiakban már rámutattunk a skalár potenciál létezésének szükséges és elégséges feltételére. Ez az állandó sűrűségű közeg sebességével kapcsolatban, időálló áramlásra a következő módon fogalmazható meg:

$$\exists \varphi = \varphi(\mathbf{r}): \mathbf{c} = \mathbf{grad} \varphi \Leftrightarrow \mathbf{rot} \mathbf{c} \equiv \mathbf{0} \quad (9.1)$$

Vagyis, ha a sebességtér rotációja – nullmértékű halmaztól eltekintve – azonosan nulla, akkor találhatunk olyan skalár-vektor függvényt, amelynek a sebesség a gradiense. A nullmértékű halmaz – például síkáramlás esetén – nulla területet jelent, vagyis a sebesség rotációja legfeljebb nulla területű vonalakon lehet nullától különböző. Ez a megjegyzés a szingularitások bevezetése és alkalmazása miatt fontos.

A folytonosság törvényének (7.4) szerinti alakjából, egyszerű számolással következik:

$$\mathit{div} \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathit{div}(\mathbf{grad} \varphi) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad (9.2)$$

(9.2) a sebességi potenciál meghatározására alkalmas, másodrendű, lineáris, elliptikus típusú parciális differenciál-egyenlet. Még ebben a legegyszerűbb alakjában is rendkívüli a jelentősége. Számos elméleti és numerikus feladat hozható erre az alakra. A sebesség a sebességi potenciál ekvipotenciális vonalaira merőleges. E merőlegesség legfeljebb a szinguláris pontokban nem teljesül.

Időálló, állandó sűrűségű közegek síkáramlásának esetében bevezethetjük az áramfüggvényt is ($\psi = \psi(x, y)$). Az áramfüggvény szintvonalai az áramvonalak, melyek érintői a sebesség vektorokkal párhuzamosak. Emiatt a sebesség és az áramfüggvény-ívelem vektori szorzata nulla:

$$\mathbf{c} \times d\mathbf{s} = 0 \Rightarrow c_x dy - c_y dx = 0 \quad (9.3)$$

Definiáljuk a sebesség összetevőket az alábbi módon és tekintsük a sebességtér rotációjának a síkra merőleges összetevőjét (legyen a síkra merőleges a „z” tengely):

$$c_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad c_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad \text{ezzel:} \quad \mathbf{rot} \mathbf{c} \Big|_z = \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\Delta \psi \quad (9.4)$$

(9.4) csak síkáramlásra érvényes ugyan, de ebben az esetben megengedhető nullától különböző örvényesség is. (9.4) például az örvénytranszport egyenlettel együtt sokféle feladat numerikus megoldására alkalmas. Tekintsük most az összenyomhatatlan közeg örvénymentes időálló síkáramlásait. Ekkor a sebességi potenciál és az áramfüggvény komplex potenciállá kapcsolható össze:

$$w = w(z) = \varphi(x, y) + i \psi(x, y); \quad \text{ahol:} \quad z = x + i y \quad (9.5)$$

A komplex potenciálok szerepe a klasszikus és modern áramlástanban egyaránt jelentős.

Vizsgáljuk meg a sebesség kiszámításának módjait. A sebesség komplex konjugáltját a komplex potenciál deriválásával kapjuk meg. Ezt a deriváltat – a komplex függvények elméletéből ismert módon, háromféleképpen is számíthatjuk:

$$\hat{c} = \frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial(iy)};$$

azaz: (9.6)

$$c_x - i c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} - i \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

Ennek az egyenletnek az alapján felírhatók a Cauchy-Riemann féle parciális differenciál-egyenletek:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\};$$
(9.7)

Ezek a parciális differenciál-egyenletek azok, amelyek alapján két – a megfelelő feltételeknek eleget tevő – függvény harmonikus társnak minősíthető, illetve e függvények ilyen módon rendelhetők egymáshoz. E két függvény – esetünkben az ekvipotenciális vonalak és az áramvonalak az „x-y” síkon ortogonális hálót alkotnak. (Erre példa a 9.1. és 9.2. ábra).

A c , állandó sebességű síkáramlás komplex potenciálja:

$$w = \hat{c} z;$$
(9.8)

A (9.6) kifejezés alkalmazásával könnyen belátható, hogy (9.8) tényleg a mondott síkáramlás komplex potenciálja.

A következőkben az ún. szingularitások segítségével vezetjük be a forrás-nyelő (Q), az örvény (Γ) és a dipólus (M) komplex potenciálját. Ezek rendre a következők:

$$w = \frac{Q}{2\pi} \ln z; \quad w = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z \quad \text{és} \quad w = \frac{M}{z};$$
(9.9)

A forrás komplex potenciáljának valós része a sebességi potenciál, a képzetes része pedig az áramfüggvény:

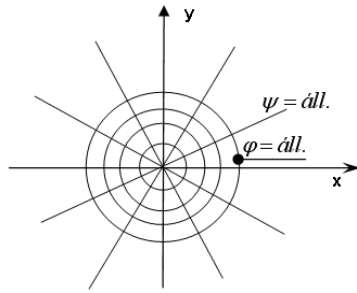
$$w = \varphi + i\psi = \frac{Q}{2\pi} \ln z = \frac{Q}{2\pi} (\ln r + i\vartheta); \quad \text{itt: } z = r e^{i\vartheta};$$

vagyis:

$$\varphi = \text{áll.} = \frac{Q}{2\pi} \ln r \Rightarrow r = \text{áll.} \quad (\text{origó középpontú körök}) \quad \text{és}$$

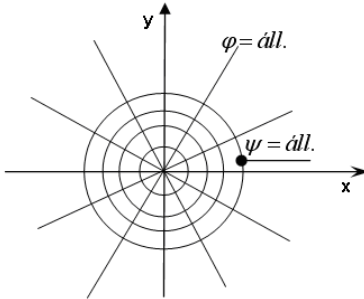
$$\psi = \text{áll.} = \frac{Q}{2\pi} \vartheta \Rightarrow \vartheta = \text{áll.} \quad (\text{origóból induló egyenesek})$$

9.1. ábra



A 9.1. ábrán a forrás vagy nyelő áramvonalai az origóból kiinduló vagy oda befutó egyenesek, az ekvipotenciális vonalak pedig koncentrikus körök. Az origó szinguláris pont, ahol végtelen sok áramvonal metszi egymást – a szinguláris pont neve forrás, ha onnan kifelé áramlik a közeg ($Q > 0$) és nyelő, ha befele áramlik a közeg ($Q < 0$).

9.2. ábra



Az örvény komplex potenciálja és a forrás komplex potenciálja között a különbség a képzetes egységgel való szorzás, illetve, hogy a jellemző mennyiséget „ Q ” helyett „ Γ ”-val jelöljük és cirkulációnak nevezzük. A potenciál, illetve az áramfüggvény:

$$w = \varphi + i\psi = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi} (i \ln r - \vartheta)$$

vagyis, a potenciálos örvény esetében:

$$\varphi = \text{áll.} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \vartheta \Rightarrow \vartheta = \text{áll.} \quad (\text{origóból induló egyenesek}) \quad \text{és}$$

$$\psi = \text{áll.} = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \Rightarrow r = \text{áll.} \quad (\text{origó középpontú körök})$$

Összegezzük a síkáramlás és a dipólus komplex potenciálját, legyen a síkáramlás sebessége a valós tengellyel párhuzamos (tehát valós szám - c):

$$w(z) = cz + \frac{M}{z}; \tag{9.10}$$

Ezzel egy henger körüli áramlás komplex potenciálját kapjuk. Ezt igazolandó írjuk fel részletesen (9.10)-et:

$$w(z) = c r (\cos \vartheta + i \sin \vartheta) + \frac{M}{r} (\cos \vartheta - i \sin \vartheta);$$

Innen a $\psi = 0$ áramvonal egyenlete:

$$\psi(r, \vartheta) = \left(c r - \frac{M}{r} \right) \sin \vartheta = 0; \quad \text{az } R = \sqrt{\frac{M}{c}} \text{ sugarú kör valóban a nulla áramvonal.}$$

Számítsuk ki a sebesség eloszlást ezen az áramvonalon:

$$w(z) = c \left(z + \frac{R^2}{z} \right) \Rightarrow \hat{c} = \frac{dw}{dz} = c \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right); \tag{9.11}$$

Egyszerű számolással belátható, hogy a sebesség abszolút értéke ezen az áramvonalon:

$$|c_{\vartheta}(\vartheta)| = |2c \sin \vartheta|; \quad (9.12)$$

A Bernoulli egyenlet felhasználásával – hiszen ideális folyadék stacionárius áramlásáról van szó – számítható a nyomás-tényező:

$$\bar{p} = \frac{P - P_0}{\frac{\rho}{2} c^2} = 1 - \left(\frac{c_{\vartheta}}{c}\right)^2 = 1 - 4 \sin^2 \vartheta; \quad (9.13)$$

A henger körüli nyomáeloszlást ábrázoltuk is – azonban, mivel ez a nyomás-eloszlás a sűrűdéses áramlások esetében is nagyon fontos és érdekes, azért az ábra a 18. fejezetben található (18.1. ábra).

Mintafeladat

Feladat: Milyen áramlást ír le a $w = z^2$ komplex potenciál? Az egyenletük alapján vázolja az áramvonalakat és az ekvipotenciális vonalakat a $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$ tartományon! Bizonyítsa be: egy-egy áramvonal mentén a nyomás az $y = x$, 45° -os egyenessel való metszés-pontban a legnagyobb!

Megoldás: A komplex potenciálok – a korábbiakban mondottak értelmében – összenyomhatatlan közeg időben állandó, síkáramlását írják le. Határozzuk meg a konkrétan vizsgálandó komplex potenciál valós és képzetes részét:

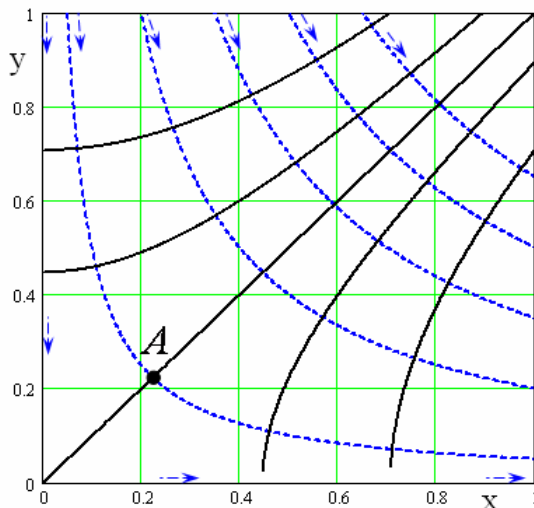
$$w = z^2 \Rightarrow \varphi + i\psi = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy \quad (9.14)$$

azaz:

$$\varphi = x^2 - y^2 \quad \text{és} \quad \psi = 2xy$$

Ezek szerint $\varphi = \text{áll.}$ az ekvipotenciális vonalak, a $\psi = \text{áll.}$ pedig az áramvonalak egyenlete.

9.3. ábra



Az egyenleteknek megfelelő görbék a 9.3. ábrán láthatók. Az ekvipotenciális vonalak folytonosak, az áramvonalak pedig (kék) szaggatott vonalak. Nem jelöltük külön, de belátható, hogy a két koordináta tengely éppen a $\psi = 0$ áramvonal. Vagyis ez egy 90 fokos „sarok”-ban kialakuló áramlás képe.

Határozzuk meg a sebesség összetevőket – ezzel egyúttal az áramvonalak mentén kialakuló áramlás irányát is megmutatjuk:

$$c_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 2x \quad \text{és} \quad c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -2y; \quad (9.11)$$

A 9.3. ábrán – kis nyilakkal – be is jelöltük az áramlás irányát. A nyilak csak a sebesség irányát jelzik, a sebesség nagysága a fenti képletekből számítható. Az origóban például a sebesség mindkét összetevője nulla – vagyis ott a (teljes) sebesség nulla.

Az ábráról látszik, hogy ez a két görbe-sereg ortogonális hálót feszít ki, azaz egy-egy áramvonal és ekvipotenciális vonal metszéspontjában az egyes görbék érintői egymásra merőlegesek. Az áramlástan feladatainak numerikus megoldásakor – egyes esetekben – az ilyen típusú háló jól használható.

A 9.3. ábrán – példaként – bejelöltük az „A” pontot. A kérdés második része szerint ugyanis bizonyítandó, hogy például az adott áramvonal mentén a nyomás az „A” pontban a legnagyobb. Ehhez fel kell használni a későbbiekben (12. fejezet) sorra kerülő Bernoulli egyenlet fizikai mondanivalóját – ami szerint a nyomás a sebesség (négyzetének) csökkenésével növekszik, hacsak a Bernoulli egyenlet összes többi – a nyomáson és sebességen kívüli – tagját azonosan nullának választhatjuk.

Ezek szerint azt kell bizonyítani, hogy a példaként tekintett áramvonalon a sebesség éppen az „A” pontban a legkisebb. Számítsuk ki a komplex potenciálból a sebességet, illetve annak abszolút értékét:

$$\hat{c} = \frac{dw}{dz} = 2z \Rightarrow |\hat{c}| = 2r \quad (\text{hacsak } z = r e^{i\vartheta}); \quad (9.15)$$

Mivel pedig a példa-áramvonalon az origóhoz éppen az „A” pont van a legközelebb, azért a sebesség ott a legkisebb és a fentiek értelmében akkor a nyomás ott a legnagyobb. Az áramvonal választás tetszőleges volt – bármely másik áramvonalra is igaz tehát a fenti okfejtés. Ezek szerint a bizonyítandó állítást sikerült igazolni.

További, egyes esetekben e tantárgy vizsgakövetelményeit jelentősen meghaladó, de ehhez a témakörhöz illeszkedő gyakorlati feladatok találhatók [7] példatár 19. „Súrlódásmentes síkáramlás” című fejezetében.

Ebben a fejezetben olyan áramlásokkal foglalkozunk, melyekben az örvényesség (a sebességtér rotációja) – legalább helyenként – zérustól különbözik. Az örvényes áramlások gyakorlati jelentősége igen nagy – elegendő csak arra gondolni, hogy az un. „dinamikus felhajtóerő” létrejötte másik oldalról nézve örvény megjelenését jelenti.

A *cirkulációt* ($\Gamma = \oint \mathbf{c} ds$) már korábban (2.13 egyenlet) definiáltuk. A cirkulációt elvileg ugyan a Stokes tétel szerint a sebességtér rotációjából is számolhatnánk – e jegyzetben azonban csak olyan cirkulációval vagy más néven örvénnyel foglalkozunk, amely esetében a sebességtér rotációja a végtelenhez tart, miközben a felület, amelyen integrálunk, tart a nullához. Így kapunk egy örvény-szálat, amelynek cirkulációja Γ és az átmérője nulla.

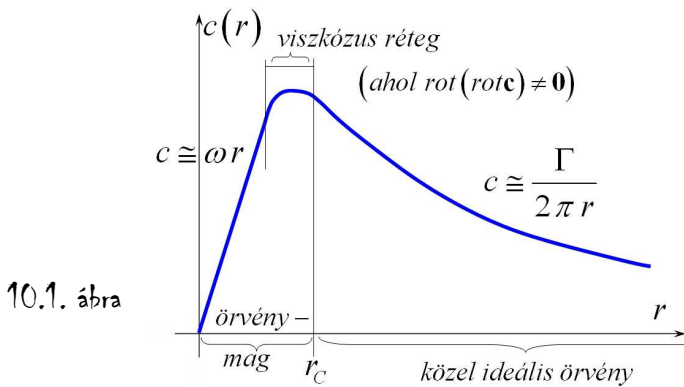
A gyakorlatban is nagyon fontos az olyan örvény-szál, melyhez sebességi potenciált tudunk rendelni. Végezzük a vizsgálatot síkáramlás esetén, egy „ $r - \vartheta$ ” polár koordináta rendszerben. Ebben a koordináta rendszerben a sebesség rotációja a következőképpen számítható:

$$\text{rotc}|_z = \frac{c}{r} + \frac{dc}{dr} \quad (\text{vagyis az áramlás hengerszimmetrikus}); \quad (10.1)$$

Tegyük fel, hogy ez a rotáció azonosan nulla, akkor (10.1) integrálásával a következőt kapjuk:

$$\frac{c}{r} + \frac{dc}{dr} = 0 \Rightarrow \frac{dc}{c} = -\frac{dr}{r} \Rightarrow c = \frac{K}{r} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (10.2)$$

Könnyen belátható, hogy a (10.2) szerinti sebesség az (9.9) kifejezésben definiált, örvény komplex potenciáljából számítható sebesség abszolút értékével azonos. Az ilyen, „potenciálos” örvény körül kialakuló áramképet a 9.2. ábrán tüntettük fel.



10.1. ábra

A 10.1. ábrán – kitekintésként – egy valóságos örvény sebesség eloszlását tüntettük fel. Az örvény az „ $r = 0$ ” helyen található és sebesség eloszlása az örvénymagon kívül lényegében azonos a potenciálos örvény sebesség eloszlásával.

Az örvény-mag lényegében két részre osztható, a belső rész merev testszerűen forog, ehhez csatlakozik az átmeneti rész, amelyben a viszkozitás jelentős szerepet játszik. A valóságos örvények öregsznek – az idő múlásával a mag sugara (r_c) növekszik, közben pedig a legnagyobb sebesség értéke csökken.

A következőkben csak (ideális) potenciálos örvényekkel foglalkozunk! Vizsgáljuk meg először egy örvény (cirkuláció) időbeli változását:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint \mathbf{c} ds \quad (10.3)$$

A differenciálást és az integrálást felcserélve, illetve az Euler egyenletet beírva kapjuk:

$$\frac{d}{dt} \oint \mathbf{c} \, ds = \oint \frac{d\mathbf{c}}{dt} \, ds + \oint \mathbf{c} \frac{d\mathbf{s}}{dt} = \oint \left(-\frac{\mathbf{grad} \, p}{\rho} + \mathbf{g} \right) \, ds + \oint \mathbf{c} \, d\mathbf{c} \quad (10.4)$$

A fenti kifejezés jobb oldalán lévő első tag, állandó sűrűség esetén akkor nulla, ha a tér-erősségnek (\mathbf{g}) van potenciálja. A jobb oldal második tagjáról rögtön látható, hogy az nulla. Ezzel a következő eredményre jutunk:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0, \quad \text{illetve:} \quad \oint \mathbf{c}^T \, ds = \text{állandó}; \quad (10.5)$$

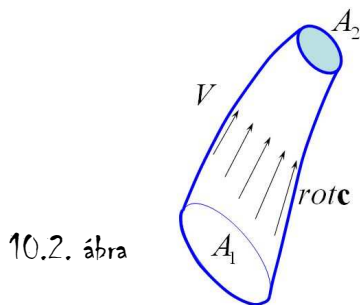
A (10.5) a **Thomson** (lord **Kelvin**) tétele; kimondja, hogy a cirkuláció értéke – ideális, összenyomhatatlan közeg esetén – egy zárt, folyékony vonal mentén az időtől független. Kelvin tételéből levonható számos következtetés közül az egyik legfontosabb az, hogy a nyugvó térből eredő áramlás örvénymentes, azaz potenciális.

Amennyiben a közeg sűrűsége barotróp módon változhat (ez fontos a meteorológiában, a repülésben és más, változó sűrűségű áramlások esetén), akkor a Bjerkness féle örvény-tételt kapjuk:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\oint \frac{\mathbf{grad} \, p}{\rho} \, ds = -\oint \frac{dp}{\rho}; \quad (10.6)$$

Helmholtz első örvény tételét fizikai megfontolásokra alapozva mondjuk ki. Tegyük fel, hogy a vizsgálatunkban szereplő folyadékokra érvényesek a Kelvin tételnél kimondott feltételek. Akkor, a perdület megmaradásra alapozva kimondhatjuk, hogy a folyadék részecskék forgásállapota nem változik: a nem forgó részecskék nem is fognak forogni, míg a forgó részecskék megtartják a forgásukat – ez **Helmholtz** első örvény tétele. Ennek a tételének több, alternatív megfogalmazása is ismert:

- az örvénycsövek egyúttal áramcsövek is;
- az örvényesség a részecskékhez kötődik (egy örvény azonos részecskékből áll);
- két örvényfelület metszéseként előálló örvényvonal azonos részecskékből áll.



10.2. ábra

Helmholtz második örvény-tételét a 10.2. ábrán látható örvénycső felhasználásával mutatjuk be. Az örvénycső hasonló az áramcsőhöz, csak áramvonal helyett örvényvonalak ($\mathbf{rot} \, \mathbf{c} = \mathbf{0}$) alkotják.

Vektoranalitikai azonosság, hogy $\mathit{div}(\mathbf{rot} \, \mathbf{c}) = 0$, ezért ennek a mennyiségnek az örvénycső térfogatára vett integrálja is nulla: $\int_V \mathit{div}(\mathbf{rot} \, \mathbf{c}) \, dV = 0$.

A Gauss-Osztrogradszkij tételt alkalmazva írható, hogy:

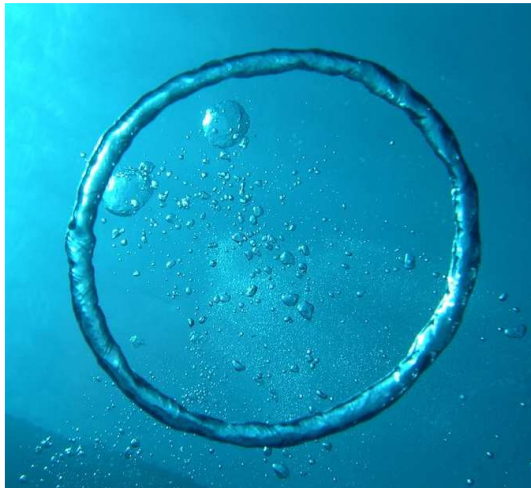
$$\int_V \mathit{div}(\mathbf{rot} \, \mathbf{c}) \, dV = \int_A \mathbf{rot} \, \mathbf{c}^T \, d\mathbf{A} = 0 \quad \text{illetve ha:} \quad \int_{A_1} \mathbf{rot} \, \mathbf{c}^T \, d\mathbf{A} = \Gamma_1$$

Illetve:

$$\int_{A_2} \text{rot } \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \Gamma_2 \Rightarrow \Gamma_1 + \Gamma_2 = 0; \left(\text{mert } \int_{A-A_1-A_2} \text{rot } \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = 0 \right) \quad (10.7)$$

Kimondható tehát, hogy a cirkuláció abszolút értéke – egy örvénycső két, örvényvonalakkal nem párhuzamos metszetében – azonos. Ha az örvénycső keresztmetszete nullához tart, akkor az örvényességnek minden határon túl nőnie kellene – ez fizikailag nem lehetséges. Ezért egy örvénycsőnek – ideális folyadékban – a közeg belsejében nem lehet vége: vagy önmagába záródik (ez az **örvénygyűrű**), vagy a közeg határáig tart.

10.3. ábra



Örvénygyűrű



Véges örvény

A 10.3. ábra bal oldali rész-ábráján egy olyan örvénygyűrű látható, amelyet delfinek hoznak létre „kedvtelésből”. A jobb oldali rész-ábrán viszont egy tornádó figyelhető meg. Ennek az alsó vége a földfelszínnél található (itt ér véget a levegő), a felső vége pedig, nagy magasságban, a sűrűlódás hatására széteszlik.

Az örvénygyűrűk gyakorlati jelentősége igen nagy, számos műszaki berendezés (főként az örvénygépek) működésében játszanak fontos szerepet – példaként említjük a repülőgép szárnyakat, a rajtuk keletkező hordozó örvény a szárvégeknél leúszó örvényekben folytatódik, és az ún. indulási örvénnyel zárul be.

A gyakorlati alkalmazások szempontjából nagyon fontos egy-egy örvény-szál (Γ) által, valamely „P” pontban indukált sebesség (\mathbf{c}_i) számítása. Ez a Biot-Savart törvény alapján lehetséges:

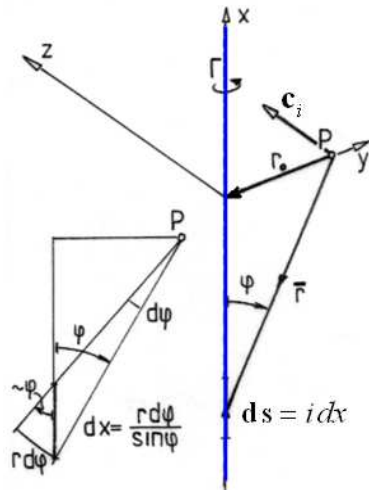
$$\mathbf{c}_i = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{ds} \times \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}; \quad (10.8)$$

Tegyük fel – az egyszerűség kedvéért – hogy az örvény éppen az „x” tengely mentén helyezkedik el (10.4. ábra). Ebben az esetben a „P” pontban keltett indukált sebességet az alábbiak szerint számíthatjuk:

$$\mathbf{c}_i|_z = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{r \sin \varphi (r d\varphi / \sin \varphi)}{r^3} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{r}$$

de: $r = r_0 / \sin \varphi$; ezzel:

10.4.bra



ezzel :

$$\begin{aligned} c_i|_z &= -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} [\cos \varphi]_{\varphi_1}^{\varphi_2} \end{aligned}$$

Végeredményben, a mínusz végtelentől ($\varphi_1 \Rightarrow 0$) plusz végtelenig ($\varphi_2 \Rightarrow 180$) terjedő integrál értéke:

$$|c_i| = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0} [-1 - 1] = \frac{\Gamma}{2\pi r_0}; \quad (10.9)$$

Ugyanerre az eredményre jutottunk az (9.9)-cel leírt örvény komplex potenciálja alapján és a potenciálos örvény (10.2)-ban megfogalmazott esetében. Ez célszerűen úgy képzelhető el, hogy a síkáramlás – amelyet a potenciálos örvény bevezetésénél kikötöttünk – általában nem egy kétméretű tartományban (síkon) jön létre, hanem azt jelenti, hogy a szóban forgó síkra merőleges irányban semmi sem változik. Azaz az áramlás olyan háromméretű áramlás, amelynek minden síkmetszetben azonos áramkép alakul ki.

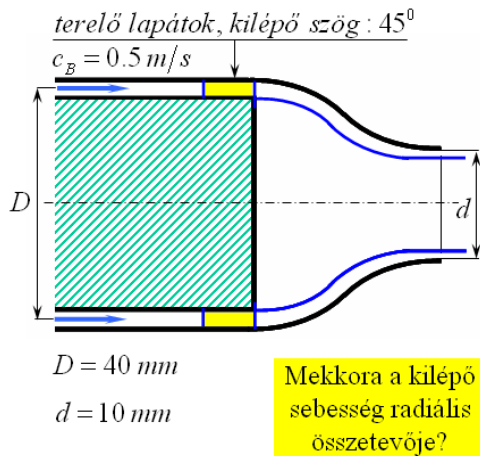
A (10.8)-cal adott indukált-sebesség számítási lehetőség előfordul szinte minden, az örvényesség felhasználásán alapuló numerikus feladatban. Számos szakmunkában foglalkoznak ennek az integrálnak a zárt alakú vagy numerikus kiszámítási lehetőségeivel.

Mintafeladat

Az örvényes áramlások gyakorlati alkalmazása igencsak széleskörű, azonban ezek a feladatok általában jelentősen magasabb szintet képviselnek, mint az e tárgyban meghatározott szint. Ezért bemutatunk ugyan egy gyakorlati feladatot, de ennek megoldásában számos, jelentős egyszerűsítést vezetünk be!

Feladat: a 10.5. ábrán egy fűvóka modellje látható. Állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) közeg érkezik c_B sebességgel, majd ezt az áramlást a terelő lapátok úgy változtatják meg, hogy az axiális sebesség állandósága mellett az axiális sebességgel egyenlő (a 45° miatt) radiális sebesség is létrejön. A közeg a fal mellett, elhanyagolható vastagságú rétegben áramlik tovább. A feladat a kilépő sugár radiális sebességének meghatározása!

10.5.bra

**Megoldás:**

A radiális sebesség a terelő lapátok után egyenlő az axiális sebességgel:

$$c_R = 0.5 \text{ m/s}$$

A közegből kialakuló áramcső egyúttal örvénycső is; Helmholtz tétele szerint a cirkuláció abszolút értéke – egy örvénycső két, örvényvonalakkal nem párhuzamos metszetében – azonos.

Számítsuk ki a cirkulációt a terelőlapátok utáni keresztmetszetben (a feladat kiírásának megfelelően hanyagoljuk el a sugár vastagságát):

$$\Gamma_1 = \oint \mathbf{c}^T \mathbf{ds} = (\pi D) c_R = \pi \cdot 0.04 \cdot 0.5 = 0.0628 \text{ m}^2/\text{s}; \quad (10.10)$$

A cirkuláció abszolút értéke ugyanekkora lesz a kilépő keresztmetszetben is, azaz a sugár vastagságától ismét eltekintve:

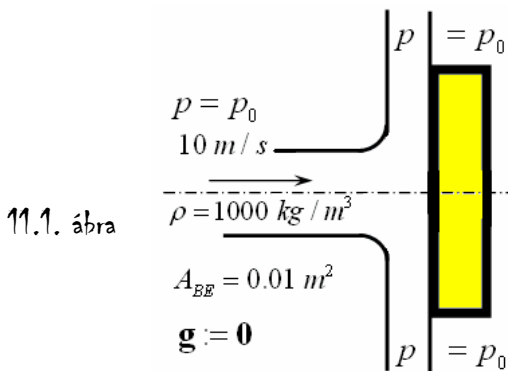
$$\Gamma_1 = 0.0628 \text{ m}^2/\text{s} = (\pi d) c_{KR} = \Gamma_2 \Rightarrow c_{KR} = \frac{\Gamma_2}{\pi d} = \frac{0.0628}{\pi \cdot 0.01} = 2 \text{ m/s}; \quad (10.11)$$

A megoldásból látható, hogy a megforgatott közeg radiális sebesség-összetevője, a csökkenő átmérő felé haladva növekszik. A gyakorlatban a feladatbelinél sokkal nagyobb átmérő csökkenést is megvalósítanak – egy ilyen geometria számítása azonban a jelen szinten áthidalhatatlan nehézségekre vezetett volna.

Az örvénytételekkel kapcsolatos feladatok találhatóak [7] 14. „Örvénytételek” c. fejezetében. Vigyázat: e feladatok némelyike meghaladja jelen tantárgy vizsgakövetelményeit.

A mozgásmennyiség megmaradására épülő, „impulzus tétel”-nek nevezett vektor egyenletet a 7. pontban vezettük be. A leggyakrabban használt alakját a (7.7) illetve a (7.8) kifejezés írja le. Fontossága és összetettsége miatt - segítségként - néhány példa feladatot oldunk meg. Ezek tulajdonképpen „Mintafeladat”-ok, kiemelt fontosságuk miatt azonban külön fejezetben szerepelnek.

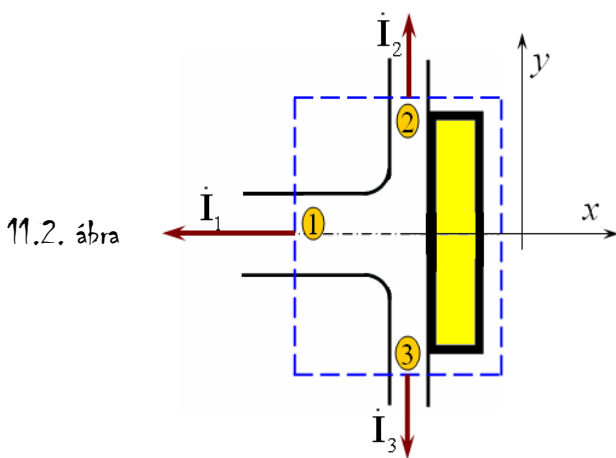
Az első feladatban bevezetésként egy, igazán egyszerű probléma megoldását vizsgáljuk. A megoldásban felhasználjuk a folytonosság törvényét és – nagyon egyszerű szinten – a Bernoulli egyenletet is; a fő eszköz azonban az „impulzus tétel”-nek nevezett egyenlet (7.8) egyszerű, de igen gyakran használt alakja.



A feladat: mekkora erőt fejt ki a 11.1 ábrán látható vízszugár az útjában lévő lapra?

Mivel az erő vektor mennyiség, tehát a nagyságát és az irányát is meg kell határozni!

Az ábráról az is megállapítható, hogy a térerősség (pl. súlyerő) hatása nulla, illetve, hogy minden sugár un. szabad sugár, ezért bennük a környezeti nyomás uralkodik.



Minden, ilyen feladat megoldását három, elengedhetetlen lépéssel kell kezdeni:

- ellenőrző felületet kell választani (szaggatott vonallal jelölt, egyszeresen összefüggő, zárt felület, ügyelni kell arra, hogy ha lehet, akkor a felület legyen merőleges az áthaladó közeg sebességére); ügyelni kell továbbá arra is, hogy az „idegen test” vagy teljes egészében a felület belsejében legyen, vagy egyáltalán ne legyen benn;
- ki kell jelölni a be- és kilépési pontokat (itt az 1, 2 és 3-as pont);

- koordináta rendszert kell választani (itt az x-y rendszert választottuk; nagyon fontos, hogy a koordináta rendszer alkalmas legyen – vagyis illeszkedjen a feladathoz).

Annak alapján, hogy a nyomás mindhárom (szabad) sugárban azonos, továbbá mert nincs helyzeti energiaváltozás sem, kimondható, hogy a sebesség abszolút értéke mindhárom sugárban, azonos. Ez az energia megmaradás elvéből következik, illetve ez a Bernoulli egyenlet igen egyszerű alkalmazása. A sebesség egyébként a felület mentén sem változik; átlagsebességként tekintjük. A sebesség vektor abszolút értéke (az abszolút érték jelének, illetve a vektorjelölés elhagyásával) egyszerűen írható:

$$c_1 = c_2 = c_3 = c = 10 \text{ m/s}; \tag{11.1}$$

Az átlagos sebesség abszolút értékének azonosságából, a folytonosság törvénye alapján következik, hogy a 11.1. ábrán (vagy a 11.2. ábrán) felfele és lefele haladó közeg felülete egyenlő és éppen a belépő keresztmetszet felével egyenlő. Vagyis a belépő tömegáram két

egyenlő részre oszlik, az egyik rész-áram felfele, a másik lefele hagyja el az ellenőrző felületet.

A könnyebb áttekinthetőség miatt megismételjük a (7.8) egyenletet:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \int_V \rho \mathbf{g} dV - \mathbf{T} \quad (7.8)$$

Számítsuk ki ennek az egyenletnek a tagjait. Kezdjük az időegységre eső mozgásmennyiség-változást jelentő bal oldallal. Ez az „A” zárt felületre vett integrál – de, minthogy közeg-áram csak három, meghatározott helyen van és, ráadásul a sebesség átlagsebesség lévén nem változik, azért a következőképpen számolhatunk:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 = \begin{bmatrix} -\rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11.2)$$

A (11.2)-ből jól látszik, hogy (7.8) vektor egyenlet. A koordináta rendszer választásának megfelelően „x” lesz az „érdekes” irány, az „y” irányban azonosan nulla időegységre eső mozgásmennyiség változást kapunk és a „z” iránnyal – a két-dimenziósnek tekinthető feladat miatt – egyáltalán nem számolunk.

Fontos leszögezni, hogy az „ \mathbf{I} ” vektorok mindegyikének az előjele – mivel vektor előtt az előjelnek mindig fizikai tartalma van – pozitív. A vektor komponensek, a kiszámításnak megfelelően lehetnek akár pozitívak, akár negatívak is, aszerint, hogy az integrál kiszámítása milyen előjelre vezet. A számolást megkönnyítő, egyszerű szabályként kimondható, hogy az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok mindig a sebesség egyenesén fekszenek és az ellenőrző felületből kifelé mutatnak (11.2. ábra).

A jobb oldal első tagjáról belátható, hogy az nulla, mivel az ellenőrző felület minden pontjában azonos a nyomás:

$$\int_{(A)} p \mathbf{dA} = \int_{(A)} p_0 \mathbf{dA} = p_0 \int_{(A)} \mathbf{dA} = \mathbf{0}, \quad \text{mert} \quad \int_{(A)} \mathbf{dA} = \mathbf{0}; \quad (11.3)$$

A jobb oldal második tagja ismét nulla, mivel a feladat leírásánál kikötöttük, hogy az eredő térerősség nulla:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{0}, \quad \text{mert} \quad \mathbf{g} \equiv \mathbf{0}; \quad (11.4)$$

Ezek szerint a (7.8) egyenletből csak a baloldal, illetve a jobb oldal utolsó tagja marad meg:

$$\dot{\mathbf{I}}_1 + \dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 = \begin{bmatrix} -\rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\rho c^2 A_{BE} / 2 \\ 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{T} = - \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (11.5)$$

A „ \mathbf{T} ” a testre ható erő-vektor, amit a feladat szerint ki kellett számítani. Ez (11.5) alapján már egyszerűen megtehető (az erőt a baloldalra hozva és az $\dot{\mathbf{I}}_2 + \dot{\mathbf{I}}_3 = \mathbf{0}$ -t felhasználva) írható:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho c^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \cdot 10^2 \cdot 0.01 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ azaz } T_x = 1000 \text{ N} \quad (11.6)$$

Vagyis arra az eredményre jutottunk, hogy a testre ható erő egyetlen, „x” irányú komponense nem nulla, a másik két összetevő nulla. A testre ható erő hatásvonala tehát az „x” tengely. (Általánosabb esetben ezzel a tengellyel párhuzamos.)

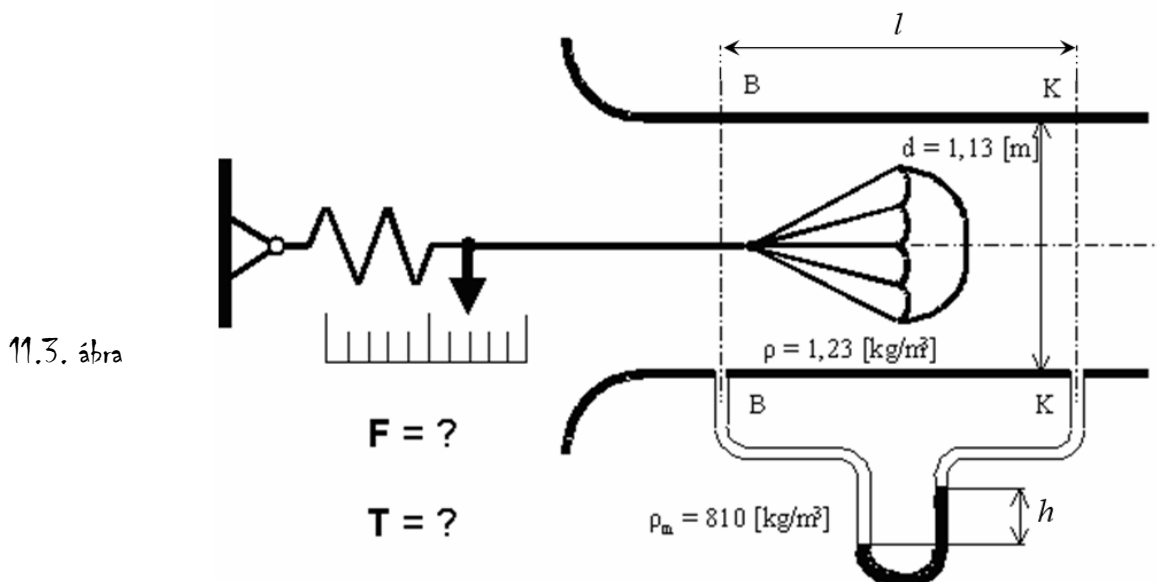
(11.6)-ból az is kiderül, hogy T_x pozitív, ami azt jelenti, hogy a keresett erő összetevő a pozitív „x” tengely irányába mutat. Ennek alapján pedig kijelenthető, hogy a testre ható erő is (mivel a másik két komponense nulla) a pozitív „x” tengely irányába mutat (\rightarrow).

A feladat megoldása alapján levonható az a tanulság, ami szerint (7.8) vektor egyenlet, belőle ebben a feladatban az erő vektort fejeztük ki, illetve határoztuk meg. Vagyis nincsen szükség semmiféle előzetes erő-felvételre – egyszerűen meg kell oldani a megfelelő egyenletet, amiből az eredmény – jelen esetben egy vektor mennyiség – kiadódik.

A második feladatban a teljesség kedvéért a súrlódás hatását is vizsgáljuk (vigyázat: ez, megfelelő átfogalmazás esetén ki is hagyható a feladtból), ezért az alábbi alapegyenletből indulunk ki:

$$\int_{(A)} \mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \int_V \rho \mathbf{g} dV - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \mathbf{S} - \mathbf{T} \quad (11.7)$$

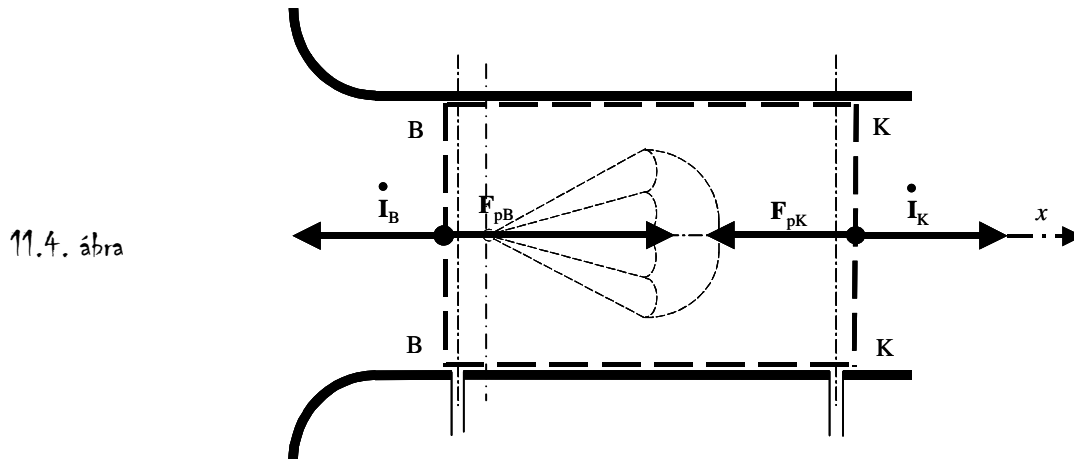
A (11.7) egyenlet (amely a (7.7)-tel azonos és valóságos közeg stacionárius, legfeljebb kvázi-stacionárius áramlására alkalmazható) számos feladat megoldásában kap fontos szerepet. Ebben az előadás vázlatban – mivel ez egy nagyon fontos terület – egy példát is bemutatunk. A példa néhány tekintetben a valóságos közegek áramlására is vonatkozik – e részek megértéséhez az előadás vázlat későbbi fejezeteinek tanulmányozása vagy a megadott szakirodalom feldolgozása szükséges.



Egy ejtőernyő kismintát vizsgálunk szélcsatornában (11.3 ábra). Az U-csöves manométerrel az üres mérőtér esetén 5 mm, a minta elhelyezése után 21 mm kitérést mérünk (h). A mérőfolyadék sűrűsége $810 \text{ [kg/m}^3]$. Tegyük fel, hogy a mérőtér „B” és „K” keresztmetszetében a nyomáseloszlás egyenletes (azaz a „B” keresztmetszet minden pontjában „ p_B ” és a „K” ke-

resztmetszet minden pontjában „ p_K ” a nyomás). Legyen a térfogatáram $\dot{V} = 64 \text{ m}^3/\text{s}$. Számoljunk továbbá mindkét keresztmetszetben az átlagsebességgel. A két keresztmetszet távolsága: $l = 2 \text{ [m]}$. A nehézségi erőtér hatása elhanyagolható. Számítsuk ki a közepes fali csúsztató feszültség értékét! Mekkora és milyen irányú erő hat az ejtőernyő kismintára („ T ”) és a levegőre („ F ”)?

A feladatot az impulzus tétellel célszerű megoldani. Az impulzus tétel vektor egyenlet, három skalár egyenletből áll. Az egyenletek felírásához illetve értelmezéséhez szükség van ellenőrző felület és koordináta tengely kijelölésére (11.4. ábra).



A 11.4. ábrán látható ellenőrző felületet (szaggatott vonal jelzi) úgy választottuk, hogy az egyszerűen összefüggőségen túl az ejtőernyő kismintát teljes egészében magában foglalja. A szélcsatorna belső felületét (belülről) érintse és a be- valamint a kilépő felületek legyenek a szélcsatorna tengelyére merőlegesek, azaz a felületi normálisok legyenek az átlagsebességgel párhuzamosak. A koordináta rendszer választása itt az „ x ” tengely választását jelenti, ez az egyetlen irány, ami a triviálistól (azonosan nulla) eredménytől különböző eredményt ad.

A feladatban szerepet játszik a súrlódás is: a nyomásesést megmértük az üres mérőtér esetén is. A súrlódás hatását az ellenőrző felület – henger felület – „ B ” és „ K ” pontok közé eső palást részén ébredő erővel (S) jellemezzük. Ez az erő a palást-felület és a fali csúsztató feszültség szorzata, „ x ” irányú, azonban az ábrán nem tüntettük fel, mert az értelme jelenleg nem ismert – ezt a számításból határozzuk meg majd.

Számoljuk ki először (11.7) bal oldalát, ami fizikai szempontból az időegységre eső, be- és kilépő mozgásmennyiség változások eredője. Az integráljel alatt álló $\rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = d\dot{m}$ az elemi tömegáramokat adja, ezek skaláris mennyiségek, belépő tömegáram esetén - mivel \mathbf{c} és \mathbf{dA} közti szög nagyobb 90 foknál, a példánkban éppen 180° - negatív, a kilépő tömegáram pedig, hasonló gondolatmenet alapján, pozitív.

Az elemi tömegáramokat a sebességgel kell szorozni - az időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát a sebesség egyenesére esik, belépéskor értelme azzal ellentétes, kilépéskor azonos. Ebből következik az az egyszerű szabály, hogy az időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor az ellenőrző felületből kifelé mutat és a sebesség egyenesére esik. A feladatban átlagsebességgel számolunk, a kijelölt integrálás tehát igen egyszerűen elvégezhető (a gyakorlatban, igen sok esetben számolunk átlagsebességgel).

Tömegáram az ellenőrző felület palástján nincs, elegendő tehát a be- és kilépő felülettel számolni. A belépő időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát (ezt a vektort a 11.4. ábrán fel is tüntettük):

$$\dot{\mathbf{I}}_B = \begin{bmatrix} -\rho c_B^2 A_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.8)$$

illetve csak a megfelelő komponens felírva: $\dot{I}_{Bx} = -\rho c_B^2 A_B$.

ahol: $A_B = d^2 \pi / 4 = (1,13^2 \pi) / 4 \cong 1 \text{ m}^2$;

$$c_B = \dot{V} / A_B = 64 \text{ m/s}; \quad \text{és:} \quad \dot{I}_{Bx} = -\rho c_B^2 A_B = -5038 \text{ N}.$$

A kilépő sebesség - mivel a szélcsatorna mérőtere hengeres cső, tehát a ki- és belépő keresztmetszet azonos ($A_B = A_K$) - a folytonosság törvénye miatt egyenlő a belépő sebességgel, azaz $c_K = c_B$. Ennek megfelelően a kilépő időegységre eső mozgásmennyiség-változás vektor tehát:

$$\dot{\mathbf{I}}_K = \begin{bmatrix} \rho c_K^2 A_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{illetve csak a megfelelő komponens felírva:} \quad \dot{I}_{Kx} = \rho c_K^2 A_K. \quad (11.9)$$

ahol: $A_K = A_B \cong 1 \text{ m}^2$;

$$c_K = \dot{V} / A_K = 64 \text{ m/s}.$$

Mivel a sűrűség, a sebesség és a keresztmetszet azonos, a végeredmény abszolút értéke az előző értékkel azonos, előjele azonban a fent megadott szabály szerint pozitív lesz, az eredmény számszerűen a következő:

$$\dot{I}_{Kx} = \rho c_K^2 A_K = 5038 \text{ N}. \quad (11.10)$$

Eszerint tehát az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok eredője ebben a feladatban (mindkét vizsgált esetben) nulla lesz, vagyis (11.7) bal oldala itt nulla. Ezzel a továbbiakban nem kell számolnunk. Más feladatokban természetesen más eredményre jutunk: a fentiekből a tanulás során a konkrét feladat megoldása mellett alapvetően a számítási módszert célszerű megérteni és elsajátítani.

A (11.7) egyenlet jobb oldalán, az első helyen az ellenőrző felületbe zárt folyadékra ható térfogati erők eredője áll - ezt a számításban elhanyagoljuk. Az áramlástan oktatásban, az ilyen típusú feladatoknál ez meglehetősen gyakori, azonban az elhanyagolásnak legalább tudatosnak illik lennie: ezt a tagot először meg kell vizsgálni és csak ha valóban megengedhető, akkor szabad elhanyagolni.

A jobb oldal második helyén a nyomásból származó felületi erők eredője található. (A harmadik helyen a csúsztató feszültségekből származó felületi erő szerepel.) A belépő- és a kilépő felületen értelmezett, nyomásból származó erőt a 11.4. ábrán tüntettük fel („ \mathbf{F}_{pB} ” és „ \mathbf{F}_{pK} ”). Mivel a folyadékokban a nyomás csak nem-negatív (általában kifejezetten pozitív) lehet, ezek az erők mindig kintről befele irányulnak. Ezt fejezi ki egyébként a tag előtt szereplő negatív előjel is: ti. a megfelelő erő ellentétes a felületi normálissal, amely mindig kifelé mutat.

Mivel feltettük, hogy a nyomás a be- illetve a kilépő felület mentén nem változik, ezért ezeknek az erőknek a kiszámítása is igen egyszerű:

$$-\int_{A_B} p \, d\mathbf{A} = \mathbf{F}_{pB} = \begin{bmatrix} p_B A_B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{és hasonlóan:} \quad \mathbf{F}_{pK} = \begin{bmatrix} -p_K A_K \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (11.11)$$

illetve csak a (nullától különböző) komponenseket felírva:

$$F_{pBx} = p_B A_B; \quad \text{és} \quad F_{pKx} = -p_K A_K. \quad (11.12)$$

Az ellenőrző felület egyszeresen összefüggő, zárt felület. A be- és kilépő felületeket, a mérőtér falát belülről érintő, hengerfelület köti össze. Ezen a nyomás egy-egy főkör mentén állandó, így az ebből származó, a hengerpaláston keletkező, a felületre merőleges erő nulla. Létezik azonban sűrűlódás, amit az üres mérőtér esetén mért 5 mm-es manométer kitérés jelez. Üres mérőtér esetén tehát a nyomáskülönbség (a levegő sűrűsége a mérőfolyadék sűrűségéhez képest kicsi, ezért ezt nem vesszük figyelembe):

$$p'_B - p'_K = \rho_m g h = 810 \cdot 9,81 \cdot 0,005 = 39,7 \text{ N/m}^2; \quad (11.13)$$

Továbbra is az üres mérőteret vizsgálva, felírhatjuk a nyomásváltozásból származó erőt:

$$F'_{pBx} + F'_{pKx} = (p'_B - p'_K) A_B \cong 40 \text{ N}; \quad \text{ahol:} \quad (11.14)$$

$$A_B = A_K = d^2 \pi / 4 = 1,13^2 \pi / 4 \cong 1 \text{ m}^2$$

A nyomásból származó eredő erő pozitív (mert $p'_B > p'_K$), tehát a pozitív „x” irányba mutat. A vizsgált esetben, (11.7) szerint tehát a mérőtér falát belülről érintő hengerfelületen a sűrűlódásból származó erő és a nyomásváltozásból származó erő van egyensúlyban:

$$\mathbf{0} = \mathbf{F}'_p + \mathbf{S}; \quad \text{azaz:} \quad \mathbf{S} = -\mathbf{F}'_p = -\begin{bmatrix} 40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \text{tehát:} \quad S_x = -40 \text{ [N]}. \quad (11.15)$$

A sűrűlódásból származó erő tehát a negatív „x” irányba mutat, azaz (amint azt a fizikai tapasztalatunk szerint el is várjuk) az áramló közeget fékezi. Ez az eredmény fontos lesz a második kérdés megválaszolásakor is, de először is ennek alapján számíthatjuk ki a fali csúsztató feszültség átlagos értékét.

Annak a hengerpalástnak, amin a csúsztató feszültség ébred a felülete:

$$A_{HP} = d \pi l = 1,13 \pi 2 = 7,1 \text{ [m}^2\text{]}. \quad (11.16)$$

Az átlagos fali csúsztató feszültség pedig az „S” abszolút értéke és e palástfelület ismeretében számítható:

$$\tau_0 = S_x / A_{HP} = 40 / 7,1 = 5,63 \text{ [N/ m}^2\text{]}. \quad (11.17)$$

Ezzel az első rész-kérdést megválaszoltuk. Vizsgáljuk ezután azt az esetet, amikor a mérő-térben az ejtőernyő kisminta is bent van. Ekkor a nyomásmérő kitérése 21 mm. A számításban megváltozik a nyomásból származó erő, a két, „x” irányú erőkomponens eredője ismét kiszámítható, mivel a nyomáskülönbséget az U-csöves manométer mutatja (a levegő sűrűsége a mérőfolyadék sűrűségéhez képest kicsi, ezért ezt most sem vesszük figyelembe):

$$p_B - p_K = \rho_m g h = 810 \cdot 9,81 \cdot 0,021 = 166,9 \text{ N/m}^2. \quad (11.18)$$

ezzel:

$$F_{pBx} + F_{pKx} = (p_B - p_K) A_A \cong +167 \text{ [N]}. \quad (11.19)$$

Az eredmény egy pozitív szám, azt mutatja, hogy a levegőre ható, nyomáskülönbségből származó eredő erő a pozitív „x” irányban hat. Az eredő erő irányát a számolás automatikusan szolgáltatja - ha pozitív számot kapunk, akkor az erő a pozitív „x” irányban, ha negatív számot kapunk, akkor a negatív „x” irányban hat!

Írjuk fel (11.7) erre az esetre érvényes, egyszerűsített alakját:

$$\mathbf{0} = - \int_{(A)} p \mathbf{dA} + \mathbf{S} - \mathbf{T} = \mathbf{F}_p + \mathbf{S} - \mathbf{T}. \quad (11.20)$$

(11.20) jobb oldalán álló három erő közül a nyomáskülönbségből származó erőt és a sűrűlódás hatására keletkező erőt már kiszámítottuk (+167 N, illetve - 40 N). A testre ható erő – ez az ejtőernyő modellre ható erő – innen már egyszerűen számítható:

$$\mathbf{T} = \mathbf{F}_p + \mathbf{S} \Rightarrow T_x = F_{px} + S_x = 167 - 40 = +127 \text{ [N]}. \quad (11.21)$$

Ez az erő a számításunk eredménye szerint a felvett „x” tengely irányával azonos irányba mutat. Ez az irány megfelel a fizikai várakozásnak is. De hangsúlyozzuk: nem kellett az erő irányát előzetesen felvenni (megválasztani): a (11.7) egyenletből ez (is) következik! Az erő kiszámításánál bemutatott módszer az egyszerűbb esetekben körülményesnek tűnhet. Nem szabad elfeledkeznünk azonban arról, hogy a számításunkkal az erővektort határozzuk meg, tehát annak nagyságát és irányát is kiszámítjuk - ebbe a gondolatmenetbe az erő "felvétele" nem illeszkedik.

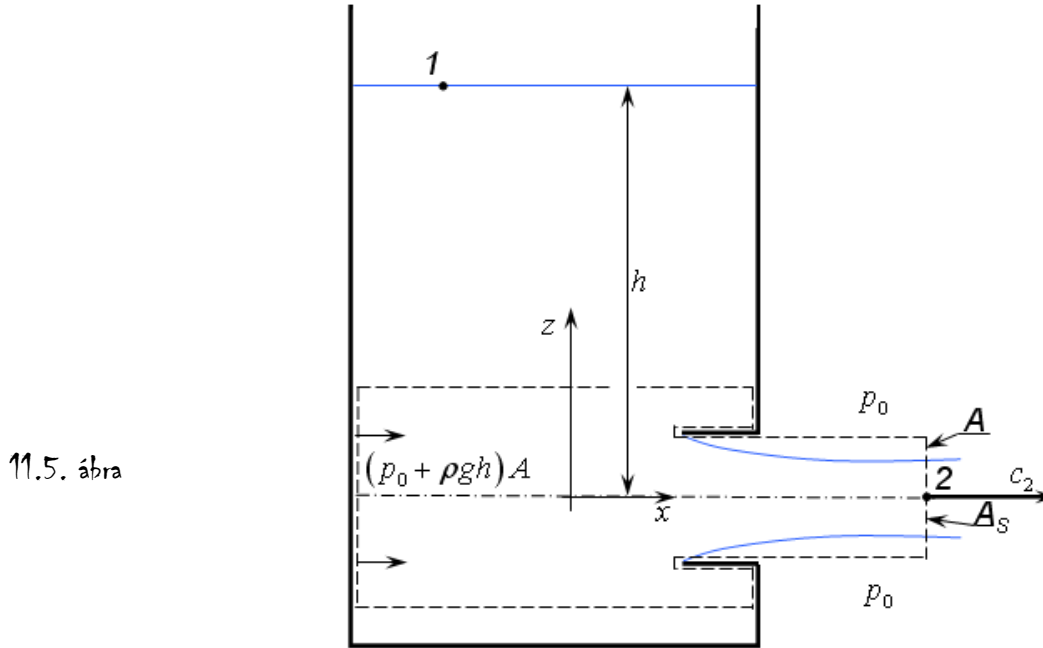
Számítsuk ki végül – a feladatnak megfelelően – a levegőre (közegre) ható erőt. Amint az a (7.5) egyenlet magyarázatánál már olvasható volt, a most kiszámítandó erőnek a testre ható erő (\mathbf{T}) a reakció ereje, így:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{T} \Rightarrow F_x = -T_x = -127 \text{ [N]}. \quad (11.22)$$

Az áramlásban az impulzus tétel alkalmazása általában akkor szükséges, ha a feladatban energia be- vagy elvezetés van. Ebben, a viszonylag egyszerű feladatban csak az impulzus tételt, a folytonosság törvényét és a hidrosztatika alapegyenletét alkalmaztuk, a Bernoulli egyenletre nem volt szükség.

A Borda féle (éles szélű) kifolyónyílás

Tekintsük az alábbi ábrán vázolt tartályt, melyből ideális közeg folyik ki. A kifolyási sebesség a Bernoulli egyenlet felhasználásával számítható. Ez tulajdonképpen példa ennek az egyenletnek az alkalmazására. A Bernoulli egyenlet alkalmazásakor gyakran szükséges koordináta rendszer (itt: 11.5. ábra, „x-z” koordináta rendszer). Szükség van továbbá (legalább) két pont választására – ezek itt az „1” és „2” pontok.



11.5. ábra

A 11.5. ábrán látható egy igen egyszerű alkalmazási példa, hiszen (7.16) hat tagja közül mindössze kettő marad az egyenletben, ezeket kiírva a (11.23)-at kapjuk:

$$\left[\frac{c^2}{2} \right]_1 + [U]_1^2 = 0 \quad (11.23)$$

Feltesszük, hogy a 11.5 ábrán látható 1-es pontban a sebesség jó közelítéssel nulla. Ekkor (11.23) a következő módon írható:

$$\left[\frac{c_2^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right] + [0 - U_1] = 0 \Rightarrow \frac{c_2^2}{2} - gh = 0 \Rightarrow c_2 = \sqrt{2gh} \quad (11.24)$$

A kifolyó közeg keresztmetszetének kiszámítása érdekében szükség van az impulzus tételre is. Ezzel ez egy olyan minta-feladat is, amelyben a Bernoulli egyenlet és az impulzus tétel együtt alkalmazandó.

Folytassuk a megoldást: az impulzus tételt az „x” tengely irányában célszerű (és kell) felírni:

$$\rho c_2^2 A_s = (p_0 + \rho g h) A - p_0 A \quad (11.25)$$

Végezzük el a lehetséges egyszerűsítéseket és helyettesítsük be a Bernoulli egyenletből kapott kifolyási sebességet az impulzus tételbe:

$$\rho c_2^2 A_s = \rho \frac{c_2^2}{2} A \Rightarrow A_s = A/2 \quad (11.26)$$

A tényleges sugár keresztmetszet (A_s) és a kilépő geometriai keresztmetszet (A) hányadosaként definiálható a kontrakciós tényező:

$$\alpha = \frac{A_s}{A}; \quad \text{a Borda féle kifoyónyílás esetében} \quad \alpha = 0.5 \quad (11.27)$$

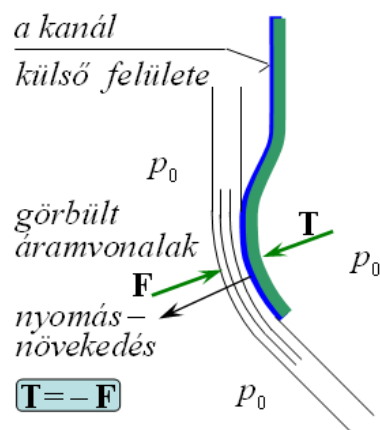
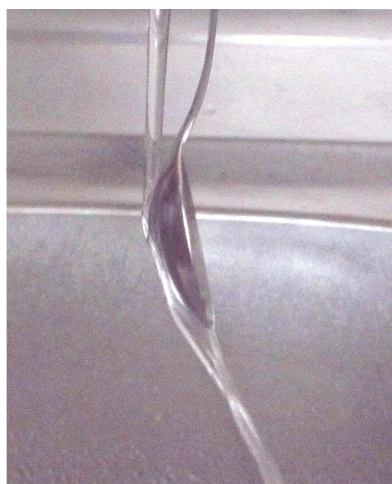
A kontrakciós tényezőt az áramlástan más területein is használják: ilyen alkalmazás pl. a mérőperemek este – ezeket a hallgatóság a laboratóriumi mérések során ismeri meg.

Az impulzus tétellel kapcsolatos további feladatok [7] 13. „Súrlódásmentes áramlás” című fejezetében, a 28. példától kezdődően olvashatók.

Példa a Coanda effektusra

A Coanda effektus (Coanda hatás) nagyon egyszerűen a folyadéksugár görbült felületre történő feltapadását jelenti. Ezt a hatást bárki egyszerűen kipróbálhatja: ha a 11.6. ábra bal oldali rész ábráján látható módon egy kanalat a csapból kifolyó vízszugárhoz elég közel tartunk, akkor a sugár a kanálhoz tapad és görbült pályán követi a kanál felületét. Vagyis a vízszugár a kanál falához tapad. Ugyanezt látható – egy vonalas vázlaton – a 11.6. ábra jobb oldali részén is. E vázlatról (is) látható, hogy az áramvonalak görbülnek, emiatt pedig, a centrifugális erőter hatására a nyomás a kanál külső felületétől indulva a sugár szabad felszínéig növekszik és a felszínen éppen a környezeti nyomást (p_0) éri el.

11.6. ábra



A görbült sugárbeli nyomásváltozást – adott esetben – az Euler egyenlet normálvektor irányába felírt komponens egyenletének (7.14 kifejezés második tagja) felhasználásával lehetne kiszámítani.

A fentiekben bemutatott nyomáskülönbségből származtatható erő (\mathbf{F}) biztosítja a sugár eltereléséhez szükséges erőt – ez az impulzus tétel tárgyalásánál már bemutatott, folyadékra ható erő (\rightarrow 7.6 kifejezés és a hozzá tartozó magyarázat).

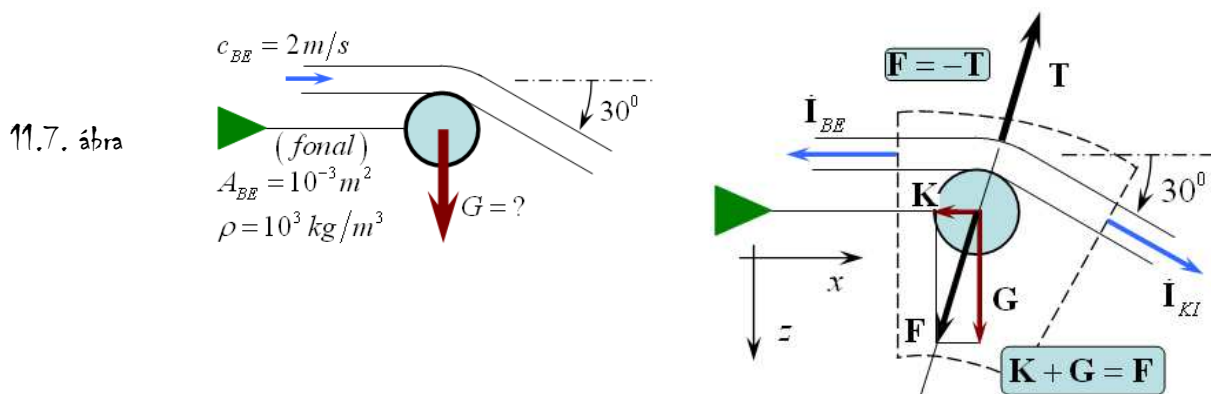
Másrészt, természetesen, a kanálra (a „testre”) hat a folyadékra ható erő reakció ereje, $\mathbf{T} = -\mathbf{F}$. Ez az erő, a folyadékra ható erővel analóg módon, a környezeti és a lecsökkent nyo-

más különbsége alapján számítható, mindössze a nyomáskülönbség iránya és ezzel az erő értelme fordul ellentétesre. Kellő odafigyeléssel egyébként, ezt az erőt a kísérletező személy érzékeli is.

Egyébiránt a Coanda effektus létrejötte alapvetően nem függ a közegek milyenségétől; például levegő közegben kialakuló levegő sugár is feltapad az útjában előforduló, görbült felületre. A repülőgépek szárnyain számos, ilyen alkalmazást találhatunk. De gyakran kihasználják ezt a hatást a versenyautók esetében is.

Feladat:

A Coanda hatás vizsgálatára alkalmas a 11.7. ábra bal oldali rész ábráján bemutatott kísérleti berendezés is. Itt egy vízszintes vízszugár ér el egy fonállal kikötött hengert. A sugár a hengerhez tapad és egy darabig – az ábra szerint 30 fokos körülfogási szögig tapad a hengerhez, majd ezután leválik és (nagyjából) egyenesen halad tovább. A görbült sugár-rész tartja meg a hengert, az ábrán jelzett pozícióban. A feladatbeli kérdés a henger súlya. Feltesszük, hogy az ábra síkjára merőlegesen semmi sem változik! Legyen továbbá a közeg ideális, azaz súrlódásmentes és összenyomhatatlan.



Megoldás:

Azt, hogy a görbült sugár képes a 11.7. ábrán vázolt henger megtartására, a korábbiakban már megindokoltuk. A kérdéses súlyerő számítására az impulzus tételt célszerű felhasználni – bár elvileg az Euler egyenlet felhasználásával is lehetne számolni, csak az a számolás a javasolt, impulzus tétel megoldásnál sokkalta bonyolultabb lenne.

Az impulzus tétel (7.6, 7.7, 7.8 stb.) alkalmazásához koordináta rendszer (11.7. ábra, jobb oldali rész ábrája, „x-z” koordináta rendszer) és egyszeresen összefüggő, zárt ellenőrző felület (11.7. ábra, jobb oldali rész ábra, szaggatott vonal) kijelölése szükséges.

Tegyük fel, hogy a sebesség mind a be- mind a kilépő keresztmetszetben állandó. Az energia megmaradás elve alapján kijelenthető, hogy a be- és kilépő sebesség abszolút értéke azonos, mivel sem a nyomás, sem a helyzeti energia nem változik. Ezért a mozgási energia sem változhat. Ezért a kilépő sebesség: $c_{KI} = 2 \text{ m/s}$, csak az iránya más, mint a belépő sebességé.

A sebességek abszolút értékének azonossága alapján – a folytonosság törvénye alapján – megállapítható, hogy a sugár kilépő keresztmetszete azonos a belépő keresztmetszettel: $A_{KI} = A_{BE}$. Írjuk fel az impulzus tétel (7.8) e feladatra alkalmazott alakját:

$$\begin{bmatrix} -\rho c_{BE}^2 A_{BE} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho c_{KI}^2 A_{KI} \cdot \cos 30 \\ 0 \\ \rho c_{KI}^2 A_{KI} \cdot \sin 30 \end{bmatrix} = -\int_A p d\mathbf{A} + \int_V \rho g dV - \begin{bmatrix} T_x \\ 0 \\ T_z \end{bmatrix} \quad (11.28)$$

A (11.28) jobb oldalán álló, nyomásból származó erő értéke nulla, mert az ellenőrző felület minden pontjában állandó a nyomás. A második tagot – a víz súlyából származó erőt - hagyoljuk el, válasszuk nullának! Ezzel a következő eredményre jutunk:

$$\begin{aligned} -\rho c_{BE}^2 A_{BE} + \rho c_{KI}^2 A_{KI} \cdot \cos 30 = -T_x &\Rightarrow T_x = \rho c_{BE}^2 A_{BE} (1 - \cos 30) \\ \text{és } \rho c_{KI}^2 A_{KI} \cdot \sin 30 = -T_z &\Rightarrow T_z = -\rho c_{BE}^2 A_{BE} \cdot \sin 30 \end{aligned} \quad (11.29)$$

A feladat adatainak behelyettesítésével kapjuk a számszerű végeredményt:

$$\begin{aligned} T_x &= +0.536N \\ T_z &= -2N \end{aligned} \quad (11.30)$$

Ezek szerint a számolásunk a 11.7. ábra jobb oldali rész ábráján – intuitív alapon felrajzolt – erőnek megfelelő eredményt adott: a hengerre (testre) ható erő, a felvett koordináta rendszer pozitívításainak megfelelően egy felfele ható ($T_z = -2N$) összetevőből és egy jobbra irányuló összetevőből ($T_x = +0.536N$) áll. Persze, a „ \mathbf{T} ” erőt nem kellett volna előre felrajzolni, azt igazából a fenti számításból számítottuk ki, és az eredményt ábráztuk.

A henger súlya – nyilvánvalóan – $G = -T_z = +2N$, lefele ható erő, ez a 11.7. ábra jobb oldali rész ábrájáról rögtön következik.

A feladat megoldását kissé megnehezíti az, hogy a hengerre ható erőket különböző szempontok szerint csoportosíthatjuk. Azt javasoljuk, hogy a henger egyensúlyát – a 11.7. ábra jobb oldali rész ábrája szerint – három erő egyensúlyaként tekintjük: $\mathbf{K} + \mathbf{G} + \mathbf{T} = \mathbf{0}$. Így mondható ki, hogy a hengerre, a folyadéksugár oldaláról ható erő (amit számolunk is) a „ \mathbf{T} ” erő. (Nyilván a súlyerő és a kötél-erő is hat a hengerre, de ezek az erők éppen azok az erők, amelyeknek az összegét a folyadéksugárnak ki kell egyenlítenie!)

Csak megjegyezzük, hogy a fonalban (kötélben) $0.536N$, húzóerő ébred, azaz a T_x , ahogyan azt el is várjuk, negatív.

Ismételjük meg az *energia megmaradás* elvére épülő Bernoulli egyenletet:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} \right]_1^2 + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{dP}{\rho} - \int_1^2 (\mathbf{c} \times \text{rot } \mathbf{c})^T \mathbf{ds} - \int_1^2 \mathbf{g}_H^T \mathbf{ds} = 0 \quad (7.14)$$

A (7.16) egyenlet ideális közeg olyan áramlására érvényes, ahol az áramlás két, kijelölt pontja között sem energia be- sem elvezetés nincs. A fenti egyenlet levezetése részletesebben pl. [5]-ben, annak 13.1 pontjában olvasható. Szintén [5]-ben, a 13.12 alpontban olvasható az az öt eset, amikor az áramlás örvényes ugyan, de (7.16) egyenlet bal oldalának két, utolsó tagja együtt zérus eredményt ad – vagyis ezekben az esetekben e két taggal nem kell számolni. Ezeket az eseteket itt nincs módunk részletesen ismertetni, csak megjegyezzük, hogy a jövőben, ebben a körben csak olyan feladattal foglalkozunk, amelyekben a két említett tag összege nulla. Példaként a legegyszerűbbet, az örvénymentes áramlást említjük. Ennek megfelelően a Bernoulli egyenlet általunk használt, legáltalánosabb alakja (örvénymentes áramlás potenciális erőterben) az alábbi:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} \right]_1^2 + [U]_1^2 + \int_1^2 \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (12.1)$$

Amennyiben pedig a sűrűség is állandó, akkor az alábbi formát kapjuk:

$$\int_1^2 \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} \right]_1^2 = 0 \quad (12.2)$$

Illetve, időben állandó áramlás esetén a Bernoulli egyenlet igen egyszerű, de gyakran használt alakját kapjuk:

$$\left[\frac{c^2}{2} + U + \frac{P}{\rho} \right]_1^2 = 0 \quad (12.3)$$

A Bernoulli egyenlet segítségével igen sok feladat oldható meg. Egy rövid, egyszerű példát már be is mutattunk a 11. pontban. Ebben, a 12. pontban egy, az időben változó sebességű áramlásra vonatkozó feladatot oldunk meg, mivel ebben a feladat típusban van néhány, figyelemre méltó és megjegyzésre javasolt megoldási lépés.

A 12.1. ábrán látható egy állandó keresztmetszetű „U” cső, melyben két, nem keveredő folyadék található. A zárólap eltávolításának pillanatában gyorsuló áramlás indul meg. Az 5. pontban leírtak szerint ez lokális és egyúttal – az állandó keresztmetszet miatt – a teljes gyorsulás is. Elvileg ugyan az „U” cső két szakaszán, ahol a vízszintes és a függőleges szakaszok csatlakoznak, létezik konvektív gyorsulás is – ez a sebesség irányváltozása miatt keletkező centripetális gyorsulás. Az ebből adódó nyomásváltozás a meginduló áramlás irányára merőleges, így ez számunkra elhanyagolható. Végeredményben tehát elegendő a lokális gyorsulással számolni.

A folytonosság törvénye szerint, állandó sűrűségű áramlás esetén igaz az alábbi összefüggés:

$$A_1 c_1 = A_2 c_2 = A c = \text{állandó} \quad (\text{itt "A" a cső keresztmetszete}). \quad (12.4)$$

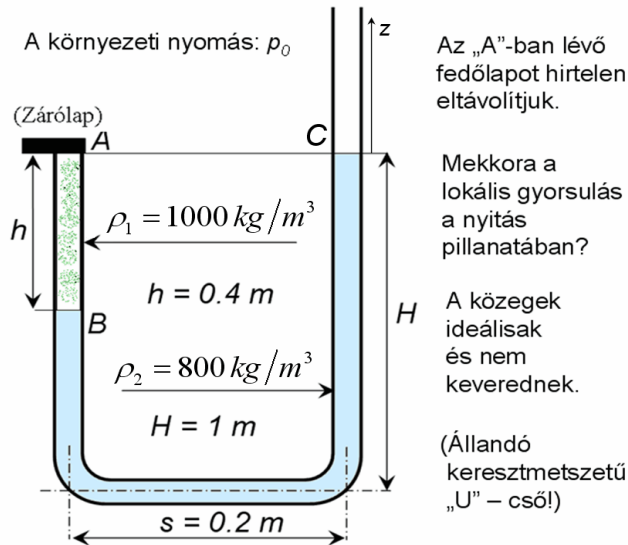
Számítsuk ki a fenti kifejezés idő szerinti parciális deriváltját:

$$A_1 \frac{\partial c_1}{\partial t} = A_2 \frac{\partial c_2}{\partial t} = A \frac{\partial c}{\partial t} = A \cdot a = \text{állandó}. \quad (12.5)$$

Ezek szerint kimondható, hogy a lokális gyorsulás – állandó sűrűségű közeg, állandó keresztmetszetű csőben történő áramlása esetén – állandó; a keresztmetszet változása esetén pedig azzal fordítottan arányos.

Egyes, időben változó áramlások vizsgálatára a Bernoulli egyenlet megfelelő alakja (12.2) használható. Ennek, a gyakorlatban is fontos területnek teljesebb bemutatása érdekében oldjuk meg az alábbi feladatot:

12.1. ábra



Rögtön megállapítható, hogy a zárólap eltávolításának pillanatában a közegek sebessége (még) nulla, a geometriai kép (még) nem változik és nyomás az „A” és a „C” pontban egyaránt p_0 , azaz azonos a környezeti nyomással. Megállapítható az is, hogy – mivel az „AB” csőszakaszon elhelyezkedő folyadék sűrűsége nagyobb, mint a másik oldalon lévő, megfelelő folyadék-oszlop sűrűsége – a lokális gyorsulás „A”-tól „C” felé mutat, abszolút értéke pedig (12.5) értelmében, mindenütt állandó.

A feladat megoldásához két, időben változó áramlásra vonatkozó Bernoulli egyenletet kell felírni. (Ez már onnan is látható, hogy a feladatban két közeg szerepel!) Az egyik Bernoulli egyenletet az „A” ponttól a „B” pontig, a másikat a „C” ponttól a „B” pontig írhatjuk fel:

$$\int_A^B \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right]_A^B = 0; \quad (12.6)$$

és:

$$\int_C^B \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} + \left[\frac{c^2}{2} + U + \frac{p}{\rho} \right]_C^B = 0; \quad (12.7)$$

Rendeljük a nulla magasságot az „AC” vízszintes vonalhoz. Ekkor, mivel ebben a feladatban a nehézségi erőter (és csak az) hat, a potenciál a következő módon írható fel:

$$U_A = U_C = 0 \quad \text{és} \quad U_B = -g h; \quad (12.8)$$

A nyomásokról, amint azt már részben leírtuk, megállapítható, hogy:

$$p_A = p_0 \quad p_C = p_0 \quad \text{és (természetesen)} \quad p_B \text{ mindkét irányból nézve azonos.}$$

Jelöljük a lokális gyorsulás értékét „ \mathbf{a} ”-val. Ez vektor mennyiség, melynek irányát a korábbiakban már megállapítottuk. Számoljuk ki a lokális gyorsulásra vonatkozó integrálokat:

$$\int_A^B \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T \mathbf{ds} = \int_A^B \mathbf{a}^T \mathbf{ds} = a h = 0.4 a \quad \text{és} \quad \int_C^B \mathbf{a}^T \mathbf{ds} = -a [H + s + (H - h)] = -1.8 a; \quad (12.9)$$

Az első integrál értéke pozitív, mert a gyorsulás és az ívelem vektor értelme azonos, a közbezárt szög nulla fok, ezért a skalár-szorzat pozitív értéket ad. A második integrálban a gyorsulás vektor és az ívelem vektor értelme éppen ellentétes, azaz a közbezárt szög 180 fok – a skalár szorzat eredménye ezért negatív.

Az „A” ponttól a „B” pontig felírható Bernoulli egyenlet tehát (figyelembe véve, hogy a sebesség azonosan nulla):

$$0.4 a + [-g h - 0] + \left[\frac{p_B}{\rho_1} - \frac{p_A}{\rho_1} \right] = 0 \quad \text{azaz:} \quad 0.4 a - g h + \left[\frac{p_B}{\rho_1} - \frac{p_0}{\rho_1} \right] = 0; \quad (12.10)$$

Az „C” ponttól a „B” pontig felírható Bernoulli egyenlet pedig:

$$-1.8 a + [-g h - 0] + \left[\frac{p_B}{\rho_2} - \frac{p_C}{\rho_2} \right] = 0 \quad \text{azaz:} \quad -1.8 a - g h + \left[\frac{p_B}{\rho_2} - \frac{p_0}{\rho_2} \right] = 0; \quad (12.11)$$

A feladat megoldásához használjuk fel, hogy a „B” pontbeli nyomás mindkét közegben azonos:

$$\begin{aligned} \rho_1 (0.4 a - g h) + (p_B - p_0) &= 0; \\ \rho_2 (1.8 a + g h) + (p_0 - p_B) &= 0; \end{aligned} \quad (12.12)$$

Adjuk össze a két egyenletet:

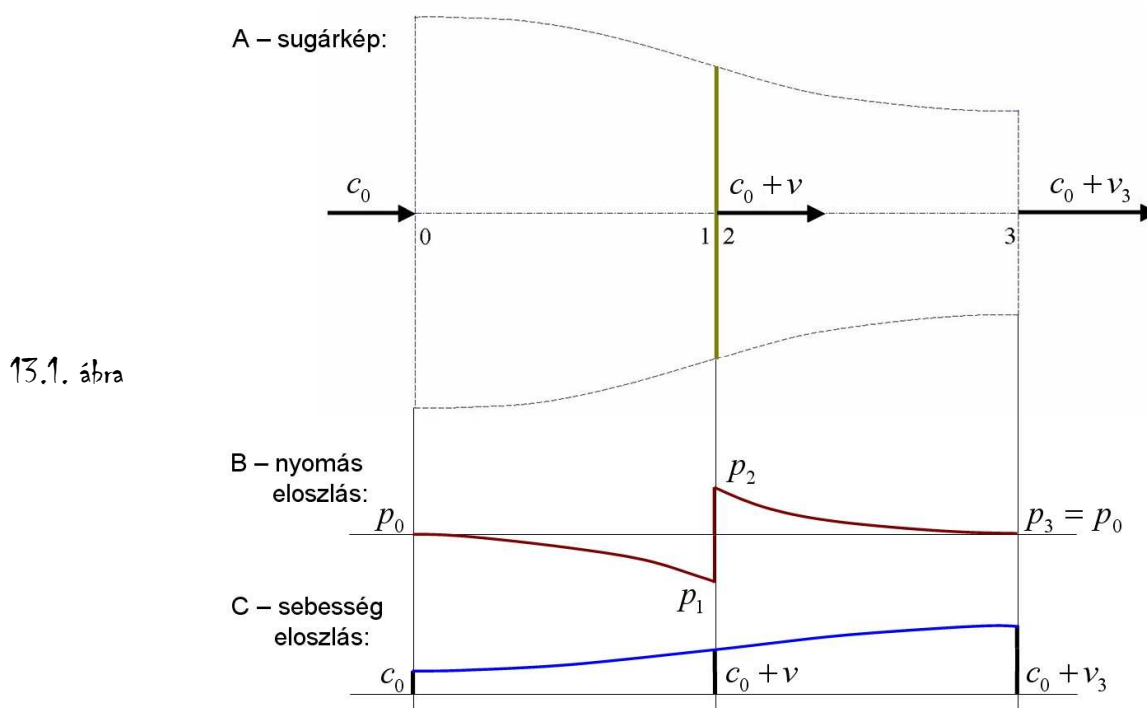
$$\begin{aligned} \rho_1 (0.4 a - g h) + \rho_2 (1.8 a + g h) &= 0 \quad \text{azaz} \\ a &= \frac{g h (\rho_1 - \rho_2)}{1.8 \rho_2 + 0.4 \rho_1} = \frac{9.81 \cdot 0.4 \cdot 200}{1.8 \cdot 800 + 0.4 \cdot 1000} \cong 0.427 \frac{m}{s^2}. \end{aligned} \quad (12.13)$$

A Bernoulli egyenlet számtalan, egyszerűbben megoldható áramlástan feladatban használható. Ezen, további feladatokra itt csak a figyelmet hívhatjuk fel: ennek a fontos egyenletnek a megértése, alkalmazásának megtanulása érdekében sok, ide vágó feladatot kell önállóan megoldani!

Az Bernoulli egyenlettel kapcsolatos további feladatok találhatók [7] 13. „Súrlódásmentes áramlás” című fejezetében (1-27. példa).

A légszár (hajószár) és a (vízszintes tengelyű) szélkerék két, nagyon elterjedten használt áramlástan eszköze. Ezért foglalkozunk itt – bár a lehető legegyszerűbben, az ún. sugár-elmélet alapján – ezekkel az eszközökkel.

A hajószár és légszár a hajók, illetve repülőgépek és egyéb eszközök (pl. légpárnás járművek) mozgatásához szükséges vonóerő (tolóerő) létrehozására szolgál. Működésének fizikai alapjait a 13.1. ábra alapján vizsgálhatjuk:



A hajószár és légszár a rajtuk átáramló közeget – a befektetett motorteljesítménynek köszönhetően – hátrafele felgyorsítja. Ezen a módon érhető el az előre mutató, úgynevezett propulziós erő. Ez az erő az, ami a szóban forgó járművet mozgatja.

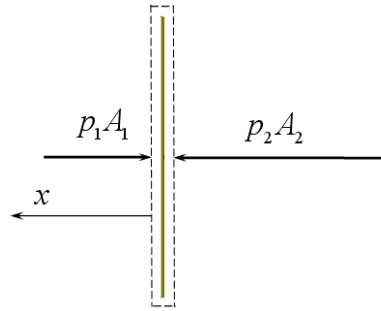
A 13.1. ábrának megfelelően a belépő közeg-jellemzők „0” indexet, a légszár sík előtti közeg-jellemzők „1” indexet, közvetlenül a sík mögötti jellemzők „2” indexet és végül a kilépő jellemzők „3” indexet kapnak.

A 13.1. és a 13.2. ábrán egy, úgynevezett „aktív tárcsa” látható: ez egy olyan tárcsa, amelynek felülete a hajószár szárnyak vagy a légszár lapátok által súrolt felület. A tárcsa előtt depresszió ($p_1 < p_0$), mögötte túlnyomás ($p_2 > p_0$) uralkodik. Feltesszük, hogy a tárcsa a sugarat nem forgatja meg. A nyomásnövekedés pontosan a bevezetett motorteljesítmény következtében áll elő. Ebben, a legegyszerűbb tárgyalásmódban a tárcsa vastagsága nulla, vagyis a nyomás ugrásszerűen növekszik meg. Nyomatékosan hangsúlyozandó, hogy a nyomás ugrásszerű változásának fizikai oka kell legyen: ez az ok a tárcsa. Ilyen, fizikai ok hiányában (fizikai ok lehet pl. a felület vagy egy lökéshullám) a nyomás csak folytonosan változhat.

Az impulzus tétel „x”-komponens-egyenlete a 13.2. ábrán vázolt ellenőrző felületre az alábbi formában írható fel:

$$0 = -p_1 A_1 + p_2 A_2 - T; \quad \text{innen:} \quad T = (p_2 - p_1) A; \quad (A_1 = A_2 = A = R^2 \pi); \quad (13.1)$$

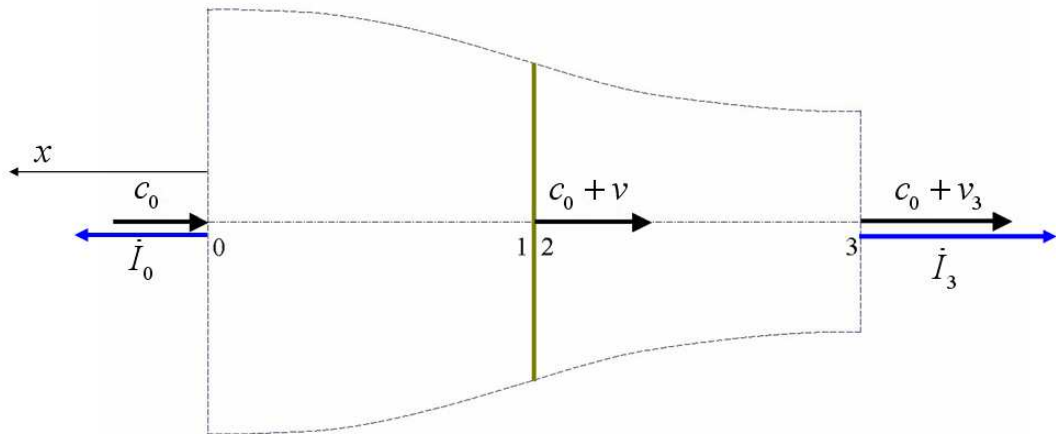
13.2. ábra



A 13.2 ábrán az impulzus tétel felírásához szükséges egyik lehetséges ellenőrző felület látható. A felület szorosan körülveszi a légszár-kört. Ezért ekkor az időegységre eső mozgásmennyiség változás vektorok a be- és kilépésnél azonos abszolút értékűek, de ellenkező értelműek, vektori összegük tehát nulla.

Ez az egyenlet a „ T ” vonóerőt határozza meg, a nyomáskülönbség alapján. Megjegyzendő, hogy a vonóerő, természetesen vektor mennyiség. Mivel ez a feladat egyméretű, az itt érvényes vektorok mind az „ x ” tengellyel párhuzamosak, a vektor jelleg az előjelükben jut érvényre. Ez, ebben az esetben azt jelenti, hogy a pozitív előjel miatt az erő az „ x ” tengely pozitív irányába mutat.

13.3. ábra



A 13.3. ábra az impulzus tétel felírásának másik lehetséges módjára nézve ad útmutatást. Ebben az esetben – némi egyszerűsítéssel szólva – feltehető, hogy a környezeti nyomás az ellenőrző felületen mindenütt állandó – a felületi integrálja tehát nulla.

Az impulzus tétel „ x ”-komponens-egyenlete erre az esetre:

$$\dot{I}_0 - \dot{I}_3 = -T; \text{ azaz: } \dot{m}c_0 - \dot{m}(c_0 + v_3) = -T; \quad (13.2)$$

$$\text{tehát: } T = \dot{m}v_3;$$

$$(\text{megjegyzés: } \dot{m} = \rho R^2 \pi (c_0 + v))$$

A 13.1. vagy 13.3. ábra alapján két Bernoulli egyenlet írható fel: az egyik a nulla és egyes pont közé, a másik a kettes és hármas pont közé. Az egyes és kettes pont között energia bevezetés van, ezért oda egyszerű Bernoulli egyenletet felírni nem szabad. A két egyenlet:

$$\frac{p_0}{\rho} + \frac{c_0^2}{2} = \frac{p_1}{\rho} + \frac{(c_0 + v)^2}{2}; \quad (13.3)$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{(c_0 + v)^2}{2} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{(c_0 + v_3)^2}{2}; \quad (13.4)$$

Vonjuk ki (13.4)-ből (13.3)-at:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{(c_0 + v_3)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} = \frac{2c_0v_3 + v_3^2}{2} = \frac{(2c_0 + v_3)v_3}{2}; \quad (13.5)$$

A fenti egyenletbe a nyomáskülönbség alapján beírható a vonóerő:

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho} = \frac{T}{\rho R^2 \pi} = \frac{\dot{m} v_3}{\rho R^2 \pi} = (c_0 + v) v_3 = \frac{(2c_0 + v_3)v_3}{2} \Rightarrow v_3 = 2v; \quad (13.6)$$

A (13.6) egyenlet végkövetkeztetése szerint a távoli indukált sebesség kétszerese a közelinek. Ez fizikailag azt jelenti, hogy a légcsavar (hajócsavar) előtti nyomáscsökkenés ($p_0 \Rightarrow p_1$) következtében jön létre a közeli indukált sebesség. Ezután, a bevezetett motorteljesítménynek köszönhetően a nyomás hirtelen megnövekszik ($p_1 \rightarrow p_2$). Mivel a légcsavar síkja után kialakuló nyomás nagyobb az atmoszféricusnál, ez a nyomás lecsökken, miközben létrejön a „második” indukált sebesség, azaz végeredményben a távoli indukált sebesség.

Ez az eredmény csak ideális közeg áramlására érvényes és csak akkor, ha nem vesszük tekintetbe a légcsavar-sugár forgását (amely forgás valóságos viszonyok között mindig létrejön). De az az állítás, ami szerint a távoli indukált sebesség a közeli kétszerese valóságos áramlásokban ugyan csak közelítőleg igaz, azonban – egyszerű, de jó közelítés lévén – nagyon sok kérdés tárgyalásakor alkalmazzák.

Vizsgáljuk meg a légcsavar (hajócsavar) energia-viszonyait. Számítsuk ki azt a hatásfokot, amit a hasznos teljesítmény és a levegőnek átadott mozgási energia hányadosa alapján számíthatunk:

$$\eta_p = \frac{T c_0}{\dot{m} \left[\frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right]} = \frac{c_0 4v}{4c_0 v + 4v^2} = \frac{1}{1 + \frac{v}{c_0}}; \quad (13.7)$$

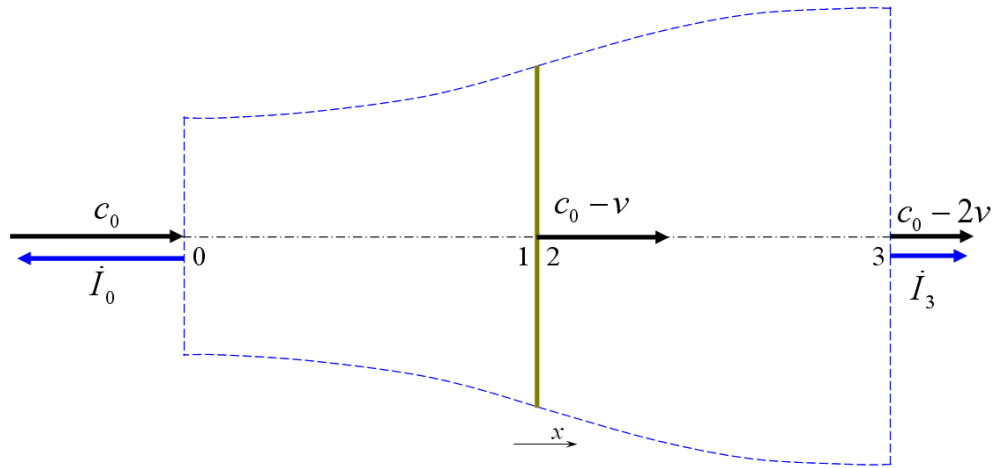
A (13.7) kifejezés a propulziós hatásfokot határozza meg. Ez a hatásfok rendkívül fontos, azt jelzi, hogy valamely erőt, adott zavartalan áramlási sebesség (c_0) esetén a lehető legkisebb indukált sebességgel célszerű létrehozni. Ez azt jelenti, hogy a kis zavartalan sebességhez nagy légcsavar átmérő tartozik. A hajócsavaroknál a közeg víz – ennek sűrűsége a levegőnél több mint 800-szor nagyobb. A hajócsavaroknál tehát adott erőt jóval kisebb indukált sebességgel lehet létrehozni – ezért a hajócsavarok átmérője viszonylagosan sokkal kisebb lehet, mint a légcsavaroké. A propulziós hatásfok egy alap hatásfok, a légcsavarok, hajócsavarok valóságos hatásfoka (összhatásfoka) ennél csak rosszabb lehet!

A hajócsavarokkal kapcsolatban még megemlítenéd, hogy ezeknél a légcsavarokkal ellentétben a lapátok a teljes súrolt keresztmetszetet (esetleg még többet is) lefedik. Ezért, amíg a légcsavar lapátokat első közelítésben egyedülálló szárnyként is kezelhetjük, addig a hajócsavar – részletesebb vizsgálat esetén – lapátrácsként számítandó.

A **szélkerék** működése során a rajta keresztüláramló levegőtől energiát vesz el. Ezért ezt a levegőtömeget a szélkerék lelassítja. Eközben, természetesen tengelyirányú erő is hat a szélkerékre – ez azonban csak a szélkerék és tartószerkezetének igénybevételét jelenti, hasznot nem hoz.

A szélkerekekkel egyébiránt azért kell foglalkozni, mert ez egyrészt a légcsavarok egy, speciális üzemállapota, másrészt önálló alkalmazásuk napjainkban rohamosan terjed.

13.4. ábra



A 13.4. ábrán a szélkerék körül kialakuló sugár képe látható. A távoli indukált sebesség itt – a (13.6) egyenlethez hasonló megfontolás alapján beláthatóan szintén a közeli kétszerese – a 13.4. ábrán már ezt tüntettük fel.

Számítsuk ki azt az energia-áramot (teljesítményt), amit a levegő a szélkeréken történő áthaladás közben lead:

$$\Delta \dot{E} = \dot{m} \left[\frac{c_0^2}{2} - \frac{(c_0 - 2v)^2}{2} \right] = \rho R^2 \pi (c_0 - v) \left[\frac{c_0^2}{2} - \frac{(c_0 - 2v)^2}{2} \right] = \rho R^2 \pi (c_0 - v)^2 2v; \quad (13.8)$$

Ez a teljesítmény az indukált sebesség függvényében változik; határozzuk meg e változás szélsőértékeit:

$$\frac{\partial(\Delta \dot{E})}{\partial v} = -2(c_0 - v)2v + 2(c_0 - v)^2 = 0 \Rightarrow (c_0 - v)2(c_0 - 3v) = 0; \quad (13.9)$$

A (13.9) egyenlet nullával egyenlő, ha:

$$\begin{cases} c_0 = v; \\ c_0 = 3v; \end{cases} \quad (13.10)$$

Az első megoldás fizikai lehetetlenség: ebben az esetben a szél sebessége a szélkeréknél nullára csökkenne – vagyis a levegő nem áramolna át a szélkeréken. Másik oldalról nézve, messze a szélkerék mögött a szél sebessége – ebben az esetben – éppen az ellenkezőjére fordulna. Ez is teljességgel lehetetlen.

A második megoldás valóban szélsőérték (ez a második derivált alapján, vagy a görbe felvázolásával könnyen belátható); ez a fizikailag kivehető teljesítmény maximuma is. Ezzel a teljesítménnyel szokás az ún. Betz-féle hatásfokot definiálni:

$$\eta_{BETZ} = \frac{\Delta \dot{E}}{\rho c_0 R^2 \pi \frac{c_0^2}{2}} = \frac{\rho R^2 \pi \left(c_0 - \frac{c_0}{3} \right)^2 2 \frac{c_0}{3}}{\rho c_0 R^2 \pi \frac{c_0^2}{2}} = \frac{16}{27}. \quad (13.11)$$

A (13.11) kifejezés számlálójába a (13.8) kifejezést írtuk, úgy, hogy behelyettesítettük a $c_0 = 3v$ összefüggést. A nevezőbe a szélkerék felületének megfelelő felületen ($R^2 \pi$), a zavar-

talán szélesebbéssel (c_0) érkező levegő energia-áramát írtuk. Ez tehát azt jelenti, hogy egy szélkerék a hozzá elméletileg érkező energiaáramból legfeljebb a Betz-féle hatásfoknak megfelelő hányadot képes hasznosítani. Ezért a szélkerekeknél relatív hatásfokról (a ténylegesen kivett teljesítmény és a Betz hatásfokkal csökkentett teljesítmény hányadosa) és abszolút hatásfokról is (a ténylegesen kivett teljesítmény és az érkező teljes energiaáram hányadosa) szokás beszélni.

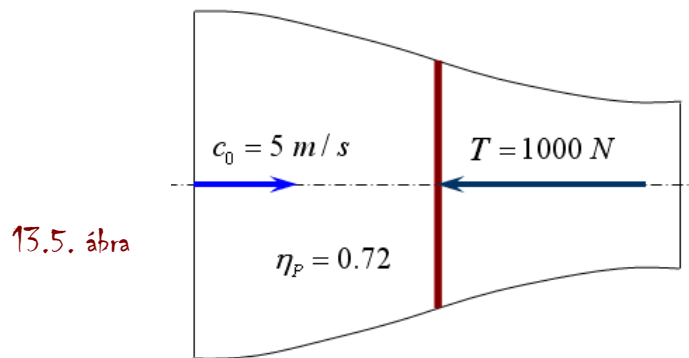
A szélkerekekkel kapcsolatban meg kell még jegyezni, hogy a fentiekben, az impulzus tétel alapján ismertetett számítások csak korlátozottan érvényesek. Amennyiben az indukált sebesség megközelíti a végtelen áramlási sebesség felét, akkor az áramlás lényegesen másképpen alakul (örvényes zónák lépnek fel), mint azt a 13.4. ábrán vázoltuk. Ennél fogva a megfontolásaink érvényüket veszítik – ilyen esetekben gyakran empirikus összefüggéseket alkalmaznak.

Az elméleti megfontolások másik korlátját az alacsony fordulatszám jelenti. A szélkerekek esetében a működési kerületi sebesség általában $70 [m/s]$, nem túlságosan magas érték. (A helikopter rotorok rotorlapátvég kerületi sebessége névleges állapotban $200 [m/s]$ -körüli érték.) A szélkerék lapátok alacsony fordulatszáma esetén a lapátok nem fedik le a teljes súrolt felületet ($R^2\pi$), az érkező levegőáram egy, akár jelentős része is, sebességváltozás nélkül halad át ezen a keresztmetszeten. Ez pedig azt jelenti, hogy a teljes körfelület, mint feltétel nem tartható – emiatt a szélkerék méretezésben további korrekciókra van szükség.

Mintafeladatok

A légszavak és hajócsavak gyakorlati alkalmazása igencsak széleskörű, azonban ezek a feladatok általában jelentősen magasabb szintet képviselnek, mint az e tantárgyban megkívánt szint. Ezért csak egy nagyon egyszerű, bevezető jellegű feladatot mutathatunk be.

Feladat: a 13.5. ábrán egy hajócsavar vázlatja látható. Állandó sűrűségű (összenyomhatatlan) közeg (víz) érkezik c_0 sebességgel. A hajócsavar tolóereje 1000 N. Adott a propulziós hatásfok értéke (0.72). Kérdés a hajócsavar átmérője, a hasznos teljesítménye, illetve a víznek átadott (tehát a forgatáshoz legalább szükséges) teljesítménye?



Megoldás:

A propulziós hatásfok (13.7) szerint számítható. Ebből a kifejezésből kiszámítható a közeli indukált sebesség:

$$v = \frac{c_0(1-\eta_P)}{\eta_P} = \frac{5(1-0.72)}{0.72} = 1.94 \text{ m/s}.$$

A közeli indukált sebesség és a tolóerő között ad kapcsolatot (13.2). Innen a keresett átmérő már kiszámítható:

$$T = \dot{m} v_3 = \rho R^2 \pi (c_0 + v) 2v \Rightarrow R = \sqrt{\frac{T}{\rho \pi (c_0 + v) 2v}}; \quad (13.12)$$

azaz:

$$R = \sqrt{\frac{T}{\rho \pi (c_0 + v) 2v}} = \sqrt{\frac{1000}{1000 \pi (5 + 1.94) \cdot 2 \cdot 1.94}} \cong 0.109 \text{ m}; \quad D \approx 22 \text{ cm}. \quad (13.13)$$

A hajócsavar hasznos teljesítménye (13.7)-ben lévő első tört kifejezés számlálójá alapján számítható:

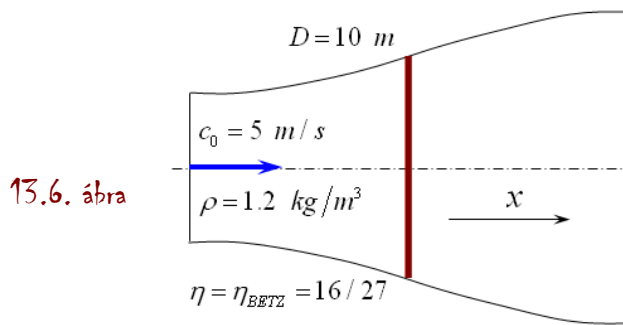
$$P_H = T c_0 = 1000 \cdot 5 = 5000 \text{ watt} = 5 \text{ kW} \quad (13.14)$$

A víznek átadott teljesítmény ugyanezen tört nevezője szerint számítható:

$$P_V = \dot{m} \left[\frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right] = R^2 \pi (c_0 + v) \rho \left[\frac{(c_0 + 2v)^2}{2} - \frac{c_0^2}{2} \right]; \quad (13.15)$$

$$P_V = 0.108^2 \pi (5 + 1.94) 1000 \left[\frac{(5 + 2 \cdot 1.94)^2}{2} - \frac{5^2}{2} \right] \cong 6.85 \text{ kW}. \quad (13.16)$$

Tekintsünk másodsorra egy szélkerékes minta feladatot.



Feladat:

A 13.6. ábrán egy szélkerék látható – a szélkerék éppen abban az állapotban működik, amikor a maximális teljesítményt adja le!

A kérdés ez, a legnagyobb leadott teljesítmény, illetve az ekkor ébredő, tengely irányú erő.

Megoldás: Az, hogy ez a szélkerék éppen ebben, a legkedvezőbb állapotban működik, onnan látható, hogy a tényleges hatásfoka egyenlő a Betz hatásfokkal. Ebben az állapotban azonban (13.10) alapján megállapíthatjuk, hogy a közeli indukált sebesség éppen a hozzááramlási sebesség harmada:

$$v = \frac{c_0}{3} = \frac{5}{3} \text{ m/s}; \quad (13.14)$$

A leadott teljesítményt legegyszerűbben a (13.11) kifejezésben található törtek számlálójából számíthatjuk ki:

$$\Delta \dot{E} = \rho R^2 \pi \left(c_0 - \frac{c_0}{3} \right)^2 2 \frac{c_0}{3} = 1.2 \cdot 5^2 \pi \left(5 - \frac{5}{3} \right)^2 2 \frac{5}{3} \cong 2 \text{ kW}; \quad (13.15)$$

A tengely irányú erőt, a 13.4. ábra jelölései alapján, az impulzus tétel segítségével számíthatjuk ki. A számításhoz elegendő az „x” irány figyelembe vétele:

$$-\dot{I}_{0x} + \dot{I}_{3x} = -T \Rightarrow T = \dot{I}_{0x} - \dot{I}_{3x} = \dot{m} [c_0 - (c_0 - 2v)]; \quad (13.16)$$

azaz:

$$T = \rho R^2 \pi (c_0 - v) \cdot (2v) = 1.2 \cdot 5^2 \pi \left(5 - \frac{5}{3} \right) \left(2 \frac{5}{3} \right) \cong 1047 \text{ N}; \quad (13.17)$$

Az erő pozitívrá adódott: ez azt jelenti, hogy az értelme a pozitív „x” iránnyal megegyezik!

A 10 méter átmérő és az 5 m/s-os szélssebesség nem kifejezetten kis érték – mégis, a leadott teljesítmény mindössze 2 kW, vagyis nem túl jelentős. Ehhez még hozzájárul az is, hogy ez a teljesítmény akkor áll rendelkezésre, amikor a szél fúj és nem akkor, amikor ténylegesen szükség lenne rá. Ezt a kérdést a szélkerekeknél valamilyen módon kezelni kell.

Másrészt könnyen belátható, hogy ha valóban jelentősebb teljesítményt kívánunk elérni, akkor a szélkerék átmérőjét növelni kell. Esetünkben a 10-szeres növelés (tehát 100 m-es átmérő) 50-szeres teljesítményt (kb. 100 kW) jelent. Innen is látható, hogy a nagy (nagyon nagy) teljesítményű szélkerekek átmérője igazán nagy, akár a több száz métert is eléri! Ekkora átmérő pedig igen komoly technikai problémák megoldását teszi szükségessé.

Elvileg minden közeg összenyomható, azonban a gyakorlatban, sok esetben mégis összenyomhatatlan közeggel számolunk. Az összenyomhatatlanság a gyakorlatban megengedhető feltétel, ha az áramló közeg jellemzői emiatt csak legfeljebb néhány százalékot változnak. De ez mindig konkrétan eldöntendő kérdés: a döntési határ a számítás igényességétől függően változhat, változik.

Példaként említjük: a közegek összenyomhatósága jelentős szerepet játszik, ha az áramlási sebesség elég nagy (nagyobb, mint a hangsebesség megadott százaléka – mondjuk, ez a vizsgálat igényességétől függően lehet, 40, 50 vagy 60% -is). Hasonlóképpen fontos ha, a nyomás és sűrűség változás elég nagy. Ugyanúgy fontos az összenyomhatóság, ha nagyok az áramlásban fellépő gyorsulások, ha nagy a magasságkülönbség, illetve ha nagy a hőmérséklet vagy koncentráció különbség.

Az összenyomható közegek áramlását jelen anyagban csak ideális folyadék (gáz) esetében vizsgáljuk. Az ilyen áramlásokat leíró egyenletrendszer:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{c}) = 0; \quad (7.4)$$

$$\frac{d \mathbf{c}}{d t} = \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \operatorname{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \mathbf{g}; \quad (7.13)$$

$$\frac{c^2}{2} + c_p T = c_p T_0 = \text{áll.} \quad (7.15)$$

$$\rho = \rho(p) \Rightarrow \text{pl. } \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \quad (\text{barotróp közeg}); \quad (14.1)$$

$$p = \rho R T; \quad (14.2)$$

A fenti egyenletrendszer első tagja a folytonosság törvénye, a második az Euler egyenlet és a harmadik az energia egyenlet. Ezeket már korábban bevezettük – ezt jelzi az egyenlet száma is. A negyedik egyenlet megmutatja, hogy a sűrűség hogyan változik a nyomás függvényében. Itt csak izentrópiikus (ideális adiabatikus) állapotváltozásokkal foglalkozunk. E területen, komolyabb vizsgálatok esetében azért elég gyakran ennél tovább kell menni – pl. egy lökéshullám (kompresszióhullám) esetében az állapotváltozás nem izentrópiikus.

A közlekedésmérnöki gyakorlatban igen fontos a járművek – esetünkben a repülőgépek – sebessége, illetve e sebesség hangsebességhez való viszonya. A hangsebesség kiszámítása [5] 13.21 pontjában közölt levezetés szerint a következő módon lehetséges:

$$a = \sqrt{\frac{d p}{d \rho}}; \quad (14.3)$$

A hangsebesség számítása izentrópiikus állapotváltozás esetén a következő:

$$a = \sqrt{\frac{d p}{d \rho}}; \quad \frac{p}{\rho^\kappa} = \text{áll.} \Rightarrow \frac{d p}{d \rho} = \text{áll.} \cdot \kappa \rho^{\kappa-1} = \kappa \frac{p}{\rho} \Rightarrow a = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}} = \sqrt{\kappa R T}; \quad (14.4)$$

Levegőre, a megfelelő számértékek behelyettesítése után, a következő, egyszerű kifejezést kapjuk:

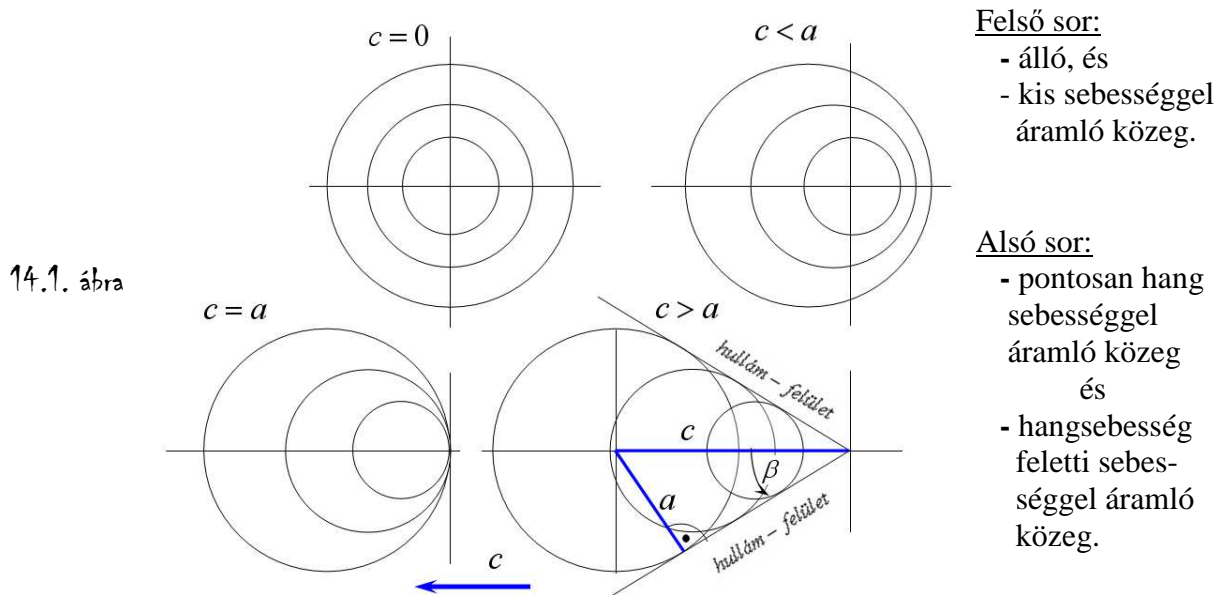
$$a = \sqrt{\kappa RT} \cong 20.05\sqrt{T} ; \quad (14.5)$$

A hang sebességét (14.5)-ből levegőben, kis hangintenzitás esetén lehet számítani. Nem izentrópikus hullámok keletkezése esetén ennél jelentősen nagyobb terjedési sebesség is előállhat.

Az összenyomható közegek áramlásának jellemzésére esetenként a Mach számot használjuk. Ez a szám az áramlás sebességének és a hang sebességének viszonyszáma:

$$Ma = \frac{c}{a} ; \quad (14.6)$$

Amikor a Mach szám egynél kisebb, akkor *szubszonikus* áramlásról beszélünk. Ha a Mach szám értéke egy körülí, akkor az áramlás *transzszónikus*. Egynél nagyobb Mach számmal jellemzett áramlás a *szuperszonikus* áramlás. Ha pedig a Mach szám sokkal nagyobb egynél (pl. nagyobb, mint 5), akkor ezt a helyzetet hangsúlyozandó az áramlást *hiperszonikus* jelző illeti.



A 14.1. ábrán látható körök a (nyomás) hullámok terjedését mutatják, álló, illetve különböző sebességgel mozgó közegben. Az álló közegben a hullámterjedés az „a”-val jelzett hangsebességgel, táguló koncentrikus körökben történik.

A szubszonikus, tehát hangsebesség alatti sebességű áramlásban a hullámterjedést láttató körök az áramlás irányában hátrafele (felső sor, jobboldali ábra) mozdulnak el. Ez az elmozdulás annál nagyobb, minél jobban megközelíti a hangsebességet az áramlás sebessége.

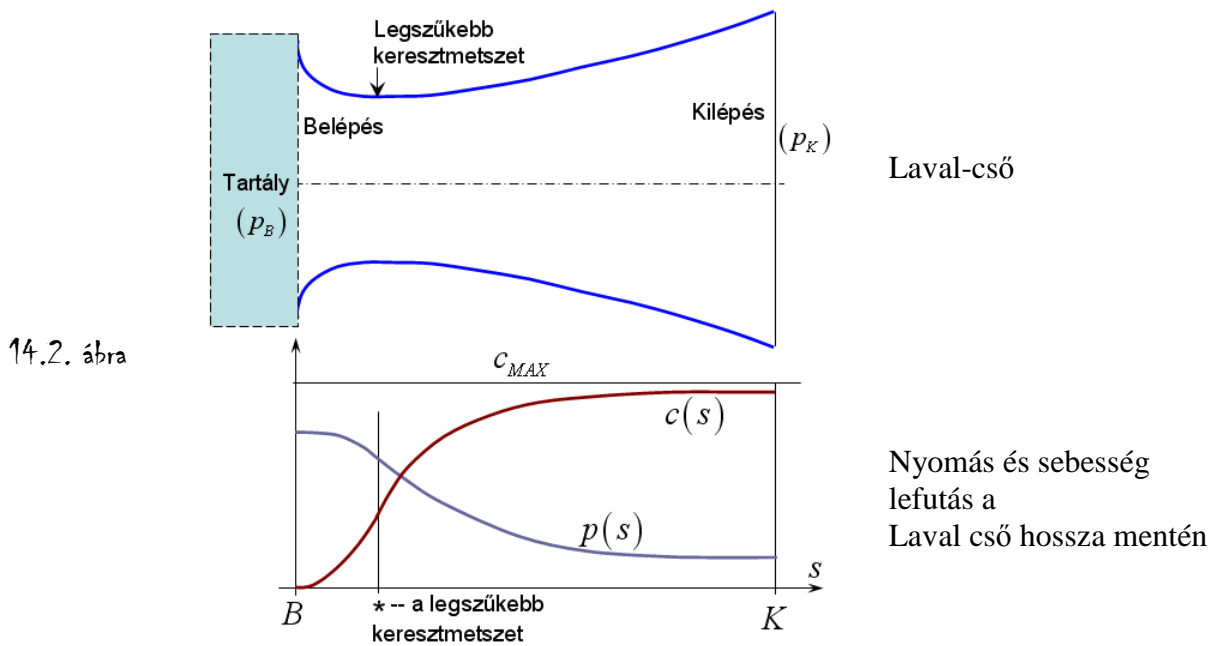
Ennek a rész-ábrának az alapján válik érthetővé a Doppler hatás: a hozzánk közeledő hangforrásból (nyomáshullám) adott idő alatt több impulzust észlelünk – ez azt jelenti, hogy a hang frekvenciája megnövekszik (a hang magasabb lesz). A másik oldalon, a tőlünk távolodó hangforrásból (nyomáshullám) adott idő alatt kevesebb impulzust észlelünk, vagyis a hang mélyül.

A 14.1. ábra alsó sorában a bal oldali rész-ábra a hangsebességgel haladó zavarforrás körüli hullámképet mutatja. Mivel a zavarforrás – lehet ez egy repülőgép is – pontosan hangsebességgel halad, azért a nyomáshullámok előrefele nem távolodnak el, hanem egy helyen koncentrálnak, azaz összegződnek. Az ilyen módon akár igen jelentősen is megnövekedett nyomással magyarázható a hangsebesség átlépésének környékén megjelenő hang-gát.

Az alsó sor jobboldali rész ábráján a hangsebesség feletti (szuperszonikus) áramlásban kialakuló képet láthatjuk. Ebben az esetben az áramlás két, élesen elválasztható tartományra oszlik: a zavarforrás hatása a „hullám-felület”-nek nevezett kúpon belül észlelhetők, ezen kívül nem keletkezik változás. Ez a szuperszonikus áramlások esetében egy fontos sajátosság. A kúpszöget a 14.1. ábra alapján – a zavarforrás „ c ”- sebességgel, a zavarás „ a ”- sebességgel halad – számíthatjuk:

$$\sin \beta = \frac{a}{c} = \frac{1}{Ma}; \quad (14.7)$$

Az összenyomható közegek áramlásának sajátosságait a **Laval-cső** példáján keresztül mutatjuk be. Ennek a szerkezetnek először csökken, majd nő a keresztmetszete – magát a szerkezetet a 14.2. ábrán vázoltuk.



A Laval-csőre talán a legközkeletűbb példa a rakéta-fúvóka. Itt, az égőtérben végbemenő égés után a nagynyomású közeg a fúvócsövön átáramolva expandál, miközben a sebessége (nagymértékben) növekszik. Ez a folyamat látható a 14.2. ábra alsó részén.

A Laval-csőben végbemenő áramlás vizsgálatához induljunk ki a folytonosság törvényének (7.3) szerinti alakjából. A kiinduló kifejezés teljes differenciálját képezve kapjuk:

$$\rho A c = \text{áll.} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dc}{c} = 0; \quad (14.8)$$

Írjuk fel továbbá az Euler egyenlet (7.13) egyméretű áramlásra vonatkozó, a térerősséget nem tartalmazó alakját, teljes differenciál formában:

$$c \, dc = c^2 \frac{dc}{c} = -\frac{1}{\rho} dp = -\frac{1}{\rho} \frac{d p}{d \rho} d \rho = -\frac{1}{\rho} a^2 d \rho; \quad (14.9)$$

A fenti egyenlet felírásánál figyelembe vettük a hangsebesség (76) szerinti kifejezését is. Helyettesítsük vissza az Euler egyenletből kapott eredményt a folytonosság törvényének teljes differenciálként történt felírása alapján kapott egyenletbe:

$$\frac{d \rho}{\rho} + \frac{d A}{A} + \frac{dc}{c} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{dc}{c} + \frac{d A}{A} + \frac{dc}{c} = \frac{dc}{c} (1 - M^2) + \frac{d A}{A} = 0; \Rightarrow \frac{dc}{c} (M^2 - 1) = \frac{d A}{A}; \quad (14.10)$$

A (14.10) kifejezés végeredménye alapján igen fontos következtetéseket vonhatunk le:

- ha $M < 1$, akkor $\text{sgn}(dc) = -\text{sgn}(dA)$, vagyis a közeg akkor gyorsul, ha a keresztmetszet csökken (és lassul, ha a keresztmetszet növekszik);
- ha $M > 1$, akkor $\text{sgn}(dc) = \text{sgn}(dA)$, vagyis a közeg akkor gyorsul, ha a keresztmetszet növekszik(!) (és lassul, ha a keresztmetszet csökken);
- ha $M = 1$, akkor $dA = 0$ és $dc \neq 0$, vagyis a legszűkebb keresztmetszetben az az áramlási sebesség éppen a helyi hangsebességgel (jele: a^* - a-csillag) egyenlő és mivel itt a keresztmetszet változás illetve az $(1 - M^2)$ egyaránt nulla, azért a sebesség változás lehet nullától különböző – és valóban: a sebesség lefutásnak itt inflexió pontja van.

A fenti elemzésből tehát az a fontos sajátosság derült ki, hogy az áramlások viselkedése a hangsebesség felett lényegesen különbözik a hangsebesség alatti viselkedéstől. Ezért, ahhoz, hogy a rakéta-fúvókában folytonos gyorsulást érijünk el, a keresztmetszetnek először csökkennie kell, majd a hangsebesség elérése után, a további gyorsulás érdekében növekednie kell. Ehhez természetesen az is szükséges, hogy az ellennyomás (p_K) a tartálynomáshoz képest (p_B) elegendően kicsi legyen.

Határozzuk meg a tartály-állapot és a csillaggal jelzett, un. kritikus keresztmetszet állapotjelzői közötti kapcsolatot. Induljunk ki az energia egyenletből:

$$c_p T_B = c_p T^* + \frac{c^{*2}}{2} = c_p T^* + \frac{a^{*2}}{2} = c_p T^* + \frac{\kappa R T^*}{2}; \quad (14.11)$$

Fejezzük ki ebből az egyenletből a tartály hőmérséklet és a kritikus hőmérséklet viszonyát:

$$\frac{T^*}{T_B} = \frac{c_p}{c_p + \frac{\kappa R}{2}} = \frac{2}{\kappa + 1}; \quad \kappa = 1.4 \text{ esetben } \frac{T^*}{T_B} = 0.833. \quad (14.12)$$

Fontos észrevenni, hogy a helyi hangsebesség – (14.4) alapján – a hőmérséklet változásával együtt változik. Határozzuk meg, hogy hogyan viszonyul egymáshoz a kritikus és a tartály hangsebesség:

$$a = \sqrt{\kappa R T} \Rightarrow \frac{a^*}{a_B} = \sqrt{\frac{T^*}{T_B}} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}}; \quad \kappa = 1.4 \text{ esetben } \frac{a^*}{a_B} = 0.913. \quad (14.13)$$

A gyakorlat szempontjából a legfontosabb a tartálynomás és a kritikus nyomás viszonya:

$$\frac{p^*}{p_B} = \left(\frac{T^*}{T_B} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = \left(\frac{2}{\kappa+1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}; \quad \kappa=1.4 \text{ esetben } \frac{p^*}{p_B} = 0.528. \quad (14.14)$$

A kritikus nyomásviszony alapján lehet megítélni, hogy egy áramlásban létrejön-e, létrejöhet-e a hangsebesség, vagy az efeletti sebesség is. Nyilvánvalóan ennek a szükséges feltétele az, hogy a nyomásviszony kisebb legyen, mint a kritikus nyomásviszony:

$$\frac{p_K}{p_B} < \frac{p^*}{p_B}; \quad (14.15)$$

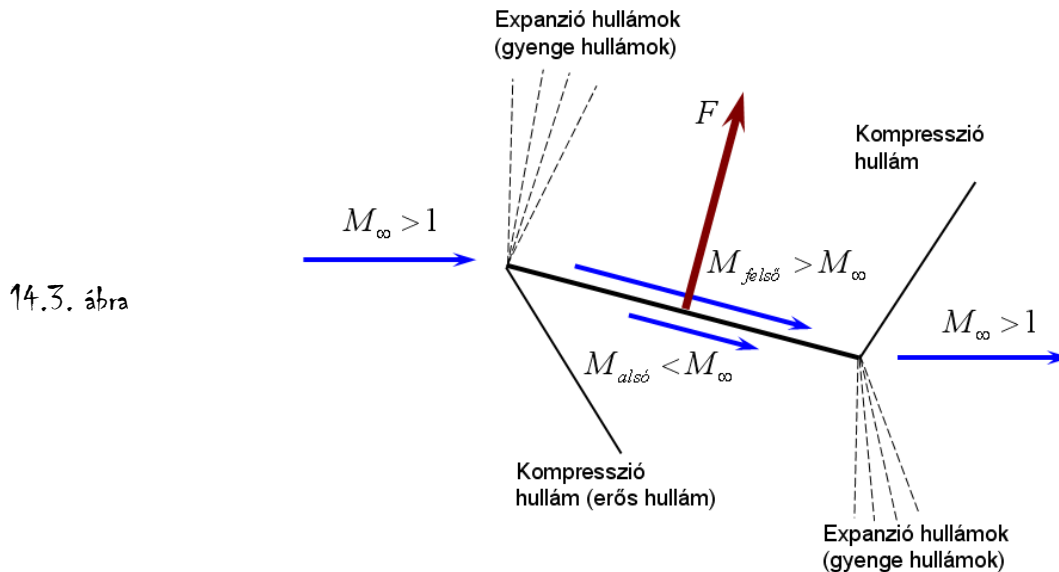
A Laval-cső fent vázolt működésének tehát szükséges feltétele az, hogy a tartálynomás a környezeti nyomáshoz viszonyítva elég magas legyen. Ha ez a feltétel teljesül, akkor kialakul a hangsebesség feletti áramlás. Ennek az áramlásnak további részleteit az Érdeklődő a szakirodalomban találhatja meg (pl. [4], [5], [6], [15]).

A 14.2. ábrán feltüntettük a maximális kiáramlási sebességet is (c_{MAX}). Ezt a sebességet az energia egyenletből számíthatjuk, úgy, hogy feltesszük, hogy a teljes tartály entalpiából mozgási energia lesz, azaz az összes, rendezetlen mozgás rendezett lesz:

$$c_p T_B = \frac{c_{MAX}^2}{2} \Rightarrow c_{MAX} = \sqrt{2c_p T_B}; \quad (14.16)$$

A Laval-csőben kialakuló áramlásban tehát a kritikus keretmetszet jellemzői és a legnagyobb (elméleti) kiáramlási sebesség csak a tartályállapot és az anyagjellemzők függvénye. E tényeknek több szempontból is nagy a gyakorlati jelentősége.

A fentiekben vizsgálat megállapításai alapján bemutatjuk, hogy szuperszonikus áramlásba helyezett síklapon hogyan keletkezik a felhajtóerő. Az áramlást továbbra is sűrűlódásmentesnek tekintjük. A 14.3. ábrán látható, állásszöggel rendelkező síklapot hangsebességnél nagyobb sebességű (M_∞) megfúvás éri.



A síklap az áramlást két részre osztja. A felső rész bővülő keresztmetszetű, ott a közeg gyorsul. A gyorsulás expanzió hullámokon keresztül jön létre. Az expanzió egyúttal a hőmérséklet és emiatt a hangsebesség csökkenését is jelenti. Így az expanzió (gyenge vagy elemi) hullámok az ábrán vázolt módon önállóak maradnak és a gyorsulás entrópia növekedés nélkül megy végbe. A síklap végénél a felső áramlás szűkülő keresztmetszetű lesz, vagyis lassul. Ideális közeg esetén éppen az eredeti sebességre lassul vissza.

A lassulás kompresszió hullámon keresztül jön létre – egy kompresszió hullám lényegében végtelen sok, egymásra torlódott elemi hullám összessége és ezért a rajta keresztül áramló közeg entrópiája véges értékkel növekszik.

A felső oldalon – a sebességnövekedésnek köszönhetően – csökken a nyomás. Hasonló megfontolásból következik, hogy az alsó oldalon, ahol a sebesség csökken, a nyomás növekszik. Az így előálló nyomáskülönbség hatására a síklap felületén keletkezik az „ F ” erő. Mivel, ideális közeg esetén a síklap mentén a felső és az alsó nyomás is állandó, ezért a keletkező erő a síklapra merőleges lesz és az eredő a síklap felezőpontjában hat. Ahhoz, hogy ilyen erő keletkezhesen, a síklapnak nullától különböző állásszöge kell legyen, vagyis – egyszerűen fogalmazva – ferdén kell álljon. A 14.3. ábráról is látható, hogy az erőnek van a zavartalan áramlásra merőleges összetevője – ez a felhajtóerő. De szükségszerűen van az áramlással párhuzamos összetevője is – ezt szuperszonikus indukált ellenállásnak is nevezik.

Összenyomható folyadék rugalmas csővezetékben

A következőkben a rugalmas anyagú csővezetékben áramló, összenyomható folyadékokban előálló nyomáshullámokkal foglalkozunk. Ez a jelenség elsősorban a hosszú csővezeték hirtelen zárásakor válik fontossá. Definiáljuk először a folyadékok térfogati rugalmasságát ([6] szerint):

$$E \cong -\frac{\Delta p}{(\Delta V/V)} = -V \frac{\Delta p}{\Delta V} \Rightarrow E = -V \frac{dp}{dV}; \quad (14.17)$$

Tekintsük példaként a vizet, ennek térfogati rugalmassága: $E_0 \cong 2.14 \cdot 10^9 \left[N / m^2 \right]$.

Határozzuk meg a folyadékokban a hang sebességét. Induljunk ki a folytonosság tételéből:

$$m = \rho V \Rightarrow dm = d\rho V + \rho dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{dV} = -\frac{\rho}{V}; \quad (14.18)$$

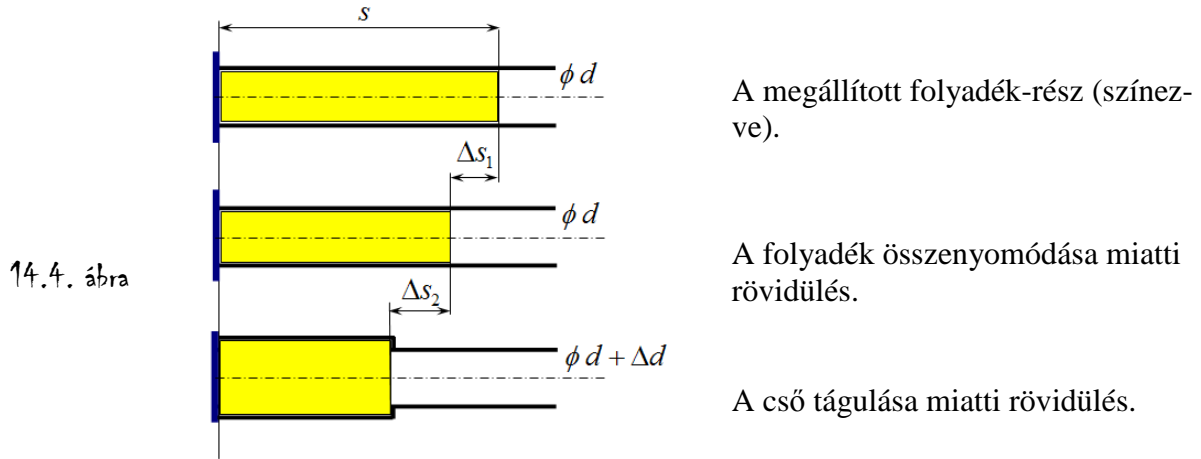
Helyettesítsük be ezt az eredményt (14.17)-be:

$$E = -V \frac{dp}{dV} = -V \frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{dV} = -V a^2 \left(-\frac{\rho}{V} \right) = \rho a^2;$$

innen:

$$a = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \left(\text{vízre: } \sim 1463 \left[\frac{m}{s} \right] \right); \quad (14.19)$$

A következőkben egy hirtelen zárási folyamatot vizsgálunk meg (14.4. ábra):



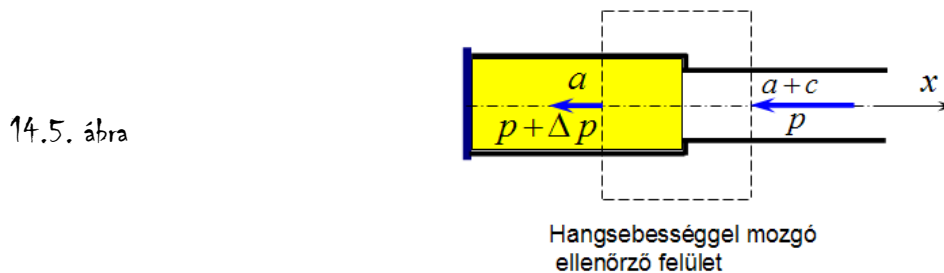
A fent vázolt folyamat hangsebességgel halad ugyan, de a hang terjedési sebességét a redukált rugalmassági modulus alapján írhatjuk fel, ahol a folyadék rugalmassága mellett a cső rugalmassága is szerepet kap. A redukált rugalmassági modulus kifejezése [6] szerint:

$$\frac{1}{E_r} = \frac{1}{E_{\text{folyadék}}} + \frac{d}{\delta} \frac{1}{E_{\text{cső}}} \quad (d - a \text{ cső átmérője, } \delta - a \text{ cső falvastagsága}); \quad (14.20)$$

A hangsebesség pedig, szintén [6] szerint:

$$a = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\frac{c^2}{4} + \frac{E_r}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{E_r}{\rho}} \quad \text{hacsak } \frac{c^2}{4} \ll \frac{E_r}{\rho}; \quad (14.21)$$

Ebben az esetben a számunkra legfontosabb a nyomásnövekedés nagyságának kiszámítása.



Válasszunk a 14.5. ábrán vázolt helyzetnek megfelelően egy olyan ellenőrző felületet, amely hangsebességgel mozog balra. Írjuk fel erre az ellenőrző felületre az impulzus tételt (tegyük fel, hogy a ki- és belépő keresztmetszet közelítőleg azonos):

$$\begin{aligned} \rho A(a+c)(a+c) - \rho A(a+c)a &= (p + \Delta p)A - pA; \\ \text{mivel } \dot{m} &= \rho A(a+c); \\ \rho A(a+c)c &= \Delta p A \Rightarrow \Delta p = \rho(a+c)c \quad (\text{ha } c \ll a, \text{ akkor: } \Delta p = \rho a c); \end{aligned} \quad (14.22)$$

A (14.22) kifejezés szerint, ha akár kisebb sebességű pl. vízáramlást hirtelen lefékezzünk, akkor igen tekintélyes nyomáshullám állhat elő; tekintsük a következő példát: $c = 10 [m/s]$, $a = 1100 [m/s]$, $\rho = 1000 [kg/m^3] \Rightarrow \Delta p = 110 \cdot 10^5 [N/m^2]!$

Mintafeladat

A [7] példatárban a 17. „Hullámjelenségek csővezetékben” c. fejezetben öt példa található, ebből a témakörből. A 18. „Gázdinamika” c. fejezet pedig tizenöt, gázdinamikai témájú feladatot tartalmaz. Ebben az előadás vázlatban egy, a repüléssel kapcsolatos mintapéldát mutatunk be.

Feladat: Egy repülőgép környezetében a környezeti hőmérséklet 220 K. A repülőn mérhető összhőmérséklet 320 K. Mekkora a repülési sebesség, illetve mekkora a repülési Mach szám? ($c_p=1000 \text{ J/kg K}$; $R=287 \text{ J/kg K}$)

Megoldás: az összenyomható közegek áramlására vonatkozó energia egyenlet – (7.17) – fajhővel osztott alakja a következőképpen írható:

$$\frac{c^2}{2c_p} + T = T_0 ; \quad (14.23)$$

A (14.23) kifejezés bal oldalán az első tag az ún. dinamikus hőmérséklet (közvetlenül nem mérhető). A baloldal második tagja a statikus hőmérséklet (ez az áramláshoz képest mozdulatlan, vagyis az áramlással együttmozgó hőmérővel mérhető). E két hőmérséklet összege a jobb oldalon álló összhőmérséklet (ez torlópont hőmérővel mérhető).

A feladatban környezeti hőmérsékletnek nevezett hőmérséklet a statikus hőmérséklettel azonos. Az összhőmérséklet és a statikus hőmérséklet ismeretében a dinamikus hőmérséklet (14.23) szerint számítható:

$$T_{din} = T_0 - T = 320 - 220 = 100 \text{ K}; \quad \text{itt} \quad T_{din} = \frac{c^2}{2c_p} ; \quad (14.23)$$

Innen a repülési sebesség könnyen számítható:

$$T_{din} = \frac{c^2}{2c_p} \Rightarrow c = \sqrt{2c_p T_{din}} = \sqrt{2 \cdot 1000 \cdot 100} \cong 447 \text{ m/s} . \quad (14.24)$$

A repülési Mach szám meghatározásához ki kell számítani a környezeti levegőben terjedő hang sebességét. Ez (14.5) szerint számolható:

$$a = \sqrt{\kappa RT} \cong 20.05 \sqrt{T} = 20.05 \sqrt{220} \cong 297 \text{ m/s} . \quad (14.25)$$

A Mach szám pedig (14.6) szerint, egyszerűen számítható:

$$Ma = \frac{c}{a} = \frac{447}{297} \cong 1.5 . \quad (14.26)$$

Az eredményül kapott Mach szám, a helyi hangsebesség másfélszeresével történő repülést jelez. Nagyjából ilyen sebességgel repült pl. az angol-francia gyártású, Concorde típusú, szuperszónikus utasszállító repülőgép.

A 220 Kelvin fokos környezeti hőmérséklet egyébként – a Nemzetközi Normál Atmoszféra értékei szerint – mintegy 10 km-es repülési magasságnak felel meg. Az ilyen, vagy hasonlóan nagy repülési sebességeket a repülőgépek ezen, vagy ennél nagyobb magasságokon érik el.

A súrlódás fizikai értelmezését és a feszültség tenzort az 1. pontban bevezettük. Hasonlóképpen ismertettük a 7. pontban a Navier-Stokes egyenletet – ez a (7.11) kifejezés. A következőkben csak az ún. Newton-i folyadékokkal foglalkozunk, mivel a mérnöki gyakorlatban előforduló folyadékok általában ilyenek. Nem Newton-i folyadékra példa az aszfalt – naponta láthatók az aszfalton a járműterhelés hatására kialakuló és tartósan megmaradó hullámok. Természetesen nagyon sok, másféle, nem Newton-i folyadék is létezik; ezekkel részletesebben a szakirodalom foglalkozik.

A Newton-i folyadékokra jellemző, hogy a bennük létrejövő csúsztató feszültség a dinamikai viszkozitással (ez anyagjellemző, amelyet megfelelő műszerrel mérni lehet) és a deformáció sebességel egyenesen arányos. A legegyszerűbb esetben ez az alábbi alakban írható:

$$\tau = \mu \frac{\partial c_y}{\partial x}; \quad \text{ahol } \mu \text{ a dinamikai viszkozitás} \quad \left([\mu] = \frac{Ns}{m^2} \right); \quad (15.1)$$

A legegyszerűbb kifejezéstől gyorsan eljuthatunk a csúsztató feszültséget összefoglaló feszültség tenzorhoz. Első lépésben belátható, hogy pl. a τ_{xy} csúsztató feszültség a megfelelő deformációs sebességgel ($\dot{\gamma}_{xy}$) arányos:

$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y} \right) = \mu \dot{\gamma}_{xy}; \quad (15.2)$$

A feszültségek indexelésénél a korábban, a (1.2) kifejezésnél leírt definíció érvényes. A fenti kifejezést már könnyen írhatjuk tovább, a Newton-i folyadékokban érvényes, a súrlódást kifejező tenzor rész:

$$\mathbf{\Pi}_s = \mu 2 \mathbf{D}_s - \frac{2}{3} (\mu \operatorname{div} \mathbf{c}) \mathbf{E}; \quad (15.3)$$

A (15.3) felírásánál felhasználtuk a derivált tenzornál, annak szimmetrikus részénél már leírtakat. A (15.3) jobb oldalának második tagja azt jelenti, hogy az összenyomhatóságból nem keletkezik csúsztató feszültség: vagyis, az első tag főátlóbeli elemeinek összege és a második tag főátlóbeli elemeinek összege azonos – csak az előjelük különbözik.

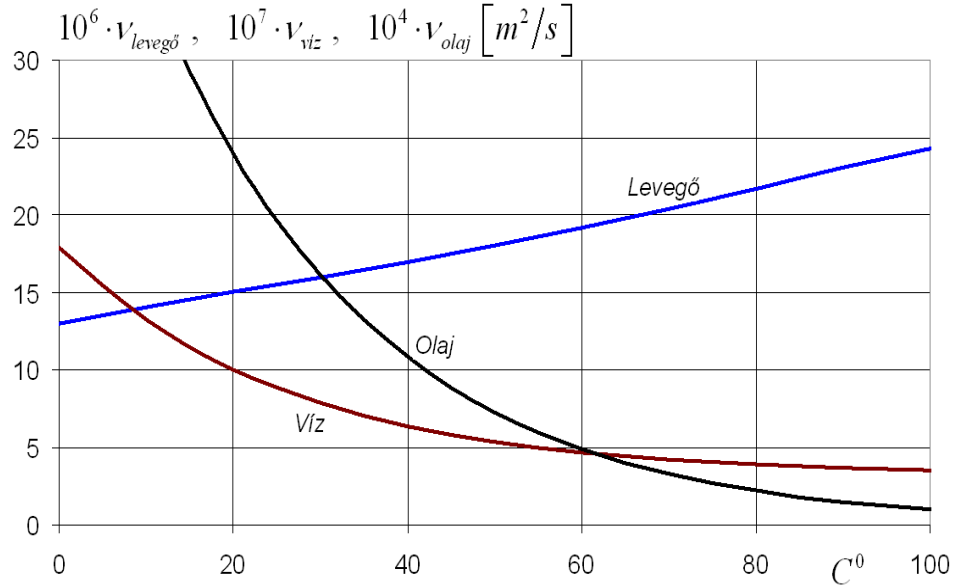
Összenyomhatatlan közeg esetében – amikor a folytonosság törvénye: $\operatorname{div} \mathbf{c} = 0$ – a Newton-i súrlódást kifejező tenzor rész egyszerűen a $\mathbf{\Pi}_s = 2\mu \mathbf{D}_s$ lesz.

A műszaki gyakorlatban a dinamikai viszkozitás helyett inkább a kinematikai viszkozitást használjuk:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}; \quad \text{dimenziója: } [m^2/s]. \quad (15.4)$$

A kinematikai viszkozitás a nevét onnan kapta, hogy dimenziójában csak kinematikai mértékegységek szerepelnek. A kinematikai viszkozitás hőmérséklet függése látható a 15.1. ábrán:

15.1. ábra



A levegő kinematikai viszkozitása 20 C^0 -on, 1 bar nyomáson kb. $1.5 \cdot 10^{-5} [m^2/s]$, dinamikai viszkozitása pedig $1.84 \cdot 10^{-5} [N s / m^2]$. A víz kinematikai viszkozitása 20 C^0 -on $1.01 \cdot 10^{-6} [m^2/s]$, dinamikai viszkozitása pedig $1 \cdot 10^{-3} [N s / m^2]$.

A levegő kinematikai viszkozitása több mint tízszerese a vízének. De ez csak annyit jelent, hogy a dinamikai viszkozitás – ami a csúsztató feszültségre közvetlenül jellemző – a sűrűségek különbsége miatt a víznél több, mint 50-szer lesz nagyobb, mint a levegőnél. Vagyis a folyadékokban ébredő csúsztató feszültség – ha az egyéb tényezők azonosak – valóban sokkal nagyobb, mint a gázokban keletkező csúsztató feszültség.

A 15.1 ábrán a két folyékony folyadék és egy gáz (levegő – gázkeverék) kinematikai viszkozitása látható, vázlatos formában. Számadatok különböző közegekre [2]-ben, illetve [13]-ban találhatóak. A folyadékok kinematikai viszkozitása a hőmérséklet növekedésével csökken. Ez azért van így, mert a viszkozitás ebben az esetben döntően a kohéziós erőn alapszik és ez, a hőmérséklet és ezzel a részecskék közötti átlagos távolság növekedésével csökken.

Ezzel szemben a gázok kinematikai viszkozitása a hőmérséklet növekedésével növekszik, mert ebben az esetben a viszkozitás a rendezetlen hőmozgás következtében előálló mozgásmennyiség cserén alapul – és ez a hőmérséklet növekedésével növekszik.

A feszültség tenzor – az ideális közegnél leírtakat is figyelembe véve – a következő alakot ölti:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s = -p\mathbf{E} + \mu 2\mathbf{D}_s - \frac{2}{3}(\mu \operatorname{div})\mathbf{E}; \quad (15.5)$$

Ez a feszültség tenzor nagyon széles körben érvényes – alkalmazható például a direkt numerikus szimulációnak nevezett (DNS) igen modern numerikus módszer esetében is. Hasonlóképpen alkalmazható az ún. örvénytranszport egyenlet numerikus megoldásában is. Ezek az eljárások régebben, a rendkívül nagy számításigény miatt nem voltak hozzáférhetőek – és ma is inkább elméleti kérdések numerikus vizsgálata lehetséges ezen a módon, a gyakorlati feladatok megoldása pillanatnyilag még a turbulencia fogalmának bevezetésével lehetséges.

A turbulencia, illetve turbulens áramlások

Ebben a jegyzetben a turbulens áramlásnak az olyan, áramlást nevezzük, amelyben a rendezetlen hőmozgás mellett, további, a hőmozgáshoz hasonló (tehát nulla várható értékű) rendezetlen mozgás is létezik, azonban ez a, turbulenciának nevezett, rendezetlen mozgás a hőmozgáshoz képest legalább egy (esetleg több) nagyságrenddel intenzívebb. A rend kedvéért leszögezzük, hogy itt csak homogén, izotróp turbulenciával foglalkozunk.

A turbulens áramlást célszerűen a turbulens sebességingadozások átlagolásával vizsgálhatjuk. Szigorúan véve az időbeli átlagolás csak időben nem változó áramlások vizsgálatát engedné meg, de – szerencsére – részecske szinten elegendően hosszúnak számító átlagolási idő az általunk vizsgálandó problémák esetében, makroszkopikus szinten igen rövid, vagyis a gyakorlatban nincs szükség korlátozásra.

Az áramlási sebességet tehát felbonthatjuk egy átlagsebességre ($\tilde{\mathbf{c}}$) és egy turbulens sebesség ingadozásra (\mathbf{c}'):

$$\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{c}' = \begin{bmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \\ \tilde{c}_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c'_x \\ c'_y \\ c'_z \end{bmatrix}; \quad (15.6)$$

A nulla várható érték alapján felírható:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{c}') dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tilde{\mathbf{c}} dt + \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c}' dt = \tilde{\mathbf{c}}; \quad (15.7)$$

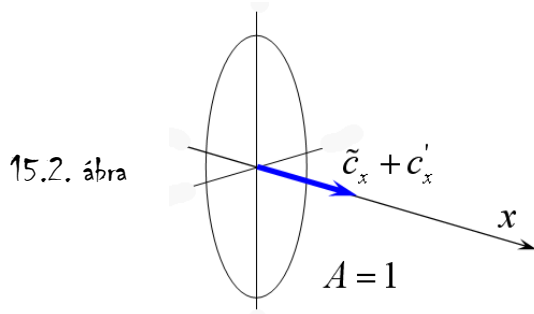
mert $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{c}' dt = \mathbf{0}$.

A (15.7) vektor-egyenlet, ez, nyilvánvalóan tagonként is igaz kell legyen, azaz:

$$\tilde{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_x \\ \tilde{c}_y \\ \tilde{c}_z \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \begin{bmatrix} c'_x \\ c'_y \\ c'_z \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (15.8)$$

A turbulens mozgás a rendezett hőmozgáshoz képest (sokkal) intenzívebb részecske cserével jár. Emiatt a turbulens áramlásokban a transzport jelenségek (sokkal) intenzívebbek, mint a réteges (lamináris) áramlásokban. A csúsztató feszültségek a mozgásmennyiség transzport következtében állnak elő – ezek a turbulens áramlásokban tehát (sokkal) nagyobbak lesznek, mint a réteges áramlásokban. Ez alól kivételt csak a nagyon lassú áramlások jelentenek, amikor az egyébként magától rétegesként alakuló áramlás mesterségesen lesz turbulenssé. Példaként tekinthetjük a rovarok szárnyát: ennek belépő része, az alakjánál fogva turbulenssé teszi a körülötte áramló levegőt. Hasonló példa a zárttéri modellek esete: ekkor un. turbulencia-szálat ragasztanak a szárny belépő élére. Megemlítjük még, hogy az ilyen áramlásokban az ívelt lap előnyösebb, mint a (vastag) szárnyprofil – és valóban, akár a rovarok szárnyát, akár a zárttéri modellt tekintjük, ezek lényegében ívelt lapok.

A turbulens áramlásokban tehát, a turbulencia miatt nyomástöbblet és turbulens nyírőfeszültség jelenik meg.



Az ábrán egy, 1 m^2 -es ellenőrző felület látható. Írjuk fel erre az impulzus tétel „x” irányban vett, időátlagolt egyenletét (a nyomásingadozásoktól eleve eltekintünk):

$$\overline{(\tilde{c}_x + c_x')(\tilde{c}_x + c_x')} \rho = -p;$$

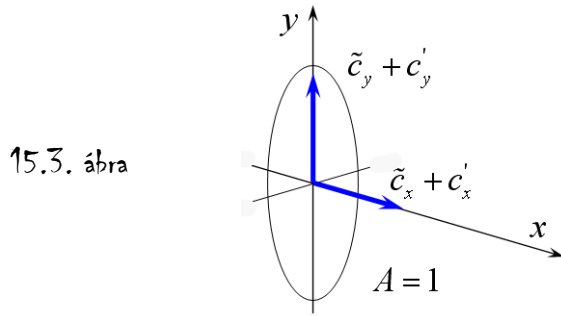
(A felület egységnyi, ezt ezért nem tüntettük fel.)

Vegyük tekintetbe, hogy a (15.8) szerinti időátlagok ugyan nullák, de a turbulens sebesség-ingadozások szorzatának időátlaga (ez ebben a kifejezésben mindig nem negatív) már általában pozitív értéket ad. A fenti kifejezést átrendezve kapjuk:

$$\rho \tilde{c}_x^2 = -p - \rho \overline{c_x' c_x'}; \quad (15.9)$$

Vagyis a statikus nyomás mellett megjelent egy tag: ezt nevezzük turbulens nyomástöbbletnek. Ezt a gondolatmenetet megismételhetnénk az „y” és a „z” tengely irányába is: ezekben az esetekben a sebesség indexe megfelelően változik.

Tekintsük most a csúsztató feszültségek alakulását.



Írjuk fel ismét az impulzus tételt:

$$\overline{(\tilde{c}_x + c_x')(\tilde{c}_y + c_y')} \rho = -\tau_{xy};$$

\Rightarrow

$$\rho \tilde{c}_x \tilde{c}_y = -\tau_{xy} - \rho \overline{c_x' c_y'};$$

Ezt a műveletsort is megismételhetjük a további koordináta párokra. Végeredményben a turbulens feszültség tenzort kapjuk:

$$\mathbf{\Pi}_t = -\rho \begin{bmatrix} \overline{c_x' c_x'} & \overline{c_x' c_y'} & \overline{c_x' c_z'} \\ \overline{c_y' c_x'} & \overline{c_y' c_y'} & \overline{c_y' c_z'} \\ \overline{c_z' c_x'} & \overline{c_z' c_y'} & \overline{c_z' c_z'} \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{\Pi}_t = 2\mu_t \mathbf{D}_S; \quad (15.10)$$

A turbulens csúsztató feszültség bal oldali kifejezése a fizikai alapokon írható fel, a jobb oldalon a (15.3)-hoz formailag hasonló módon írtuk fel ugyanezt a tenzort, de emiatt be kellett vezetni a turbulens dinamikai viszkozitást. A turbulens dinamikai viszkozitás számítására rendkívül sokféle eljárás ismeretes – ezen eljárások többnyire függenek a vizsgált problémától.

E tantárgy keretei között mindössze a legrégebbi és legegyszerűbb, Prandtl féle turbulencia modellt vezetjük be. Ez a turbulencia modell egy, szintén Prandtl nevéhez fűződő hipotézisen alapul:

$$c_x' = -\ell \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \quad \text{és} \quad c_y' = -c_x' = \ell \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \quad \text{ahol: } \ell = \kappa y; \quad (15.11)$$

($\kappa = 0.36$, ℓ a keveredési úthossz).

A (15.11) egyenlet hipotézis, amit az alkalmazásával elért (jó) eredmények igazolnak! Számítsuk ki a turbulens csúsztató feszültséget:

$$\overline{\dot{c}_x \dot{c}_y} = -\ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \Rightarrow \tau_{xy} = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right| \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right|; \quad (15.12)$$

innen:

$$\mu_t = \rho \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right|; \quad \text{és} \quad \nu_t = \ell^2 \left| \frac{\partial \tilde{c}_x}{\partial y} \right|;$$

A turbulens dinamikai és kinematikai viszkozitás – ahogy annak lennie is kell – pozitív mennyiség. Eközben, természetesen, a nyomástól különbözően (ami mindig pozitív) a csúsztató feszültség tetszőleges előjelű lehet. Ezt az biztosítja, hogy a (15.12) első sorában a sebesség deriváltjának az abszolút értéke szerepel. Ezért, a másik, abszolút értéken kívüli derivált előjele biztosítja a csúsztató feszültség megfelelő előjelét.

Fontos leszögezni azt is, hogy a turbulens kinematikai és dinamikai viszkozitás nem anyagjellemző, hanem az éppen kialakuló sebességeloszlás függvénye. Ez utal a számítási nehézségekre is: a turbulens áramlás sebességeloszlását az áramlás sebességterének ismeretében számíthatjuk, miközben a sebességtér számításához a turbulens viszkozitás ismerete szükséges.

Az áramlások turbulensségét gyakran jellemzik a turbulencia faktoral:

$$tf = \frac{3.85 \cdot 10^5}{\text{Re}_{\text{krit.gömb}}}. \quad (15.13)$$

A nevezőben a gömb kritikus Reynolds száma szerepel. Erről a későbbiekben lesz szó. A fenti hányados értéke általában egynél nagyobb szám – minél kevésbé turbulens, minél simább egy áramlás, annál inkább közeledik a „*tf*” érték az 1-hez. A teljesen turbulenciamentes áramlás esetén lesz az értéke egy.

A Navier-Stokes egyenlet

A mozgásmennyiség megmaradását kifejező differenciálegyenletet már korábban bevezettük:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{\rho} \text{div}\mathbf{\Pi} + \mathbf{g}; \quad (7.11)$$

$$\text{ahol: } \mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \text{div}\mathbf{c})\mathbf{E} + 2\mu_t\mathbf{D}_s = \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s + \mathbf{\Pi}_t;$$

A (7.11) egyenlet megismétlése kapcsán itt már módunk nyílik az áramlástanban használt feszültség tenzor részletes felírására is. Ezzel kapcsolatban megjegyezzük, hogy a (7.11) egyenlet elnevezése és tartalma nagymértékben függ attól, hogy a feszültség tenzorba mely tagokat vesszük be (vagy hagyjuk el):

$$\text{Ha: } \mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} = \mathbf{\Pi}_{id} \quad \text{és} \quad \mathbf{c} \equiv \mathbf{0};$$

Akkor a hidrosztatika alap differenciálegyenletét kapjuk, ez a (8.1) sz. egyenlet.

Ha: $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} = \mathbf{\Pi}_{id}$;

Ezzel a (7.12)-es kifejezésnél már leírt, Euler egyenlethez jutunk, amely ideális (összenyomható) közegek áramlásának leírására alkalmas.

Ha: $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \operatorname{div}\mathbf{c})\mathbf{E} =$
 $= \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s$;

Ezzel a Navier-Stokes egyenlethez jutunk, mely valóságos közeg áramlásának leírására alkalmas – legfeljebb a kezelhetőség lehet probléma.

Ha:
 $\mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s - (2/3)(\mu \operatorname{div}\mathbf{c})\mathbf{E} + 2\mu_t\mathbf{D}_s =$
 $= \mathbf{\Pi}_{id} + \mathbf{\Pi}_s + \mathbf{\Pi}_t$;

Ezzel a Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlethez jutunk, amely a valóságos közegek turbulens áramlást – annak átlagát írja le.

A Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet ugyan tartalmaz néhány megszorítást a Navier-Stokes egyenlethez képest, de emiatt, az átlagolt mennyiségek alkalmazása miatt, jelen pillanatban a bonyolultabb és kiterjedtebb áramlások (numerikus) számítására (a tényleges, gyakorlati feladatok többnyire ilyenek) ezt az egyenletet alkalmazzák. Ezért tűnik úgy, hogy a Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet az általánosabb – holott, mindössze ezt vagyunk képesek a gyakorlatban is alkalmazni.

A Reynolds átlagolt Navier-Stokes egyenlet alkalmazása megköveteli valamely turbulencia modell alkalmazását is – a jelen gyakorlatban sokszor az un. $k-\varepsilon$ (a turbulens kinetikai energiára és a turbulencia miatti energia disszipációra épülő) modellt alkalmazzák.

Vizsgáljuk meg a Navier-Stokes egyenlet összenyomhatatlan közegekre vonatkozó alakját. Ekkor, a folytonosság miatt: $\rho = \text{áll} \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{c} = 0 \Rightarrow \mathbf{\Pi} = -p\mathbf{E} + 2\mu\mathbf{D}_s$. Számítsuk ki ennek a feszültség tenzornak a divergenciáját:

$$\operatorname{div}\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}\nabla = -\operatorname{grad} p + (2\mu\mathbf{D}_s)\nabla = \tag{15.14}$$

$$= -\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2\frac{\partial c_x}{\partial x} & \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x}\right) & \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) \\ \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial y}\right) & 2\frac{\partial c_y}{\partial y} & \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial y}\right) \\ \left(\frac{\partial c_z}{\partial x} + \frac{\partial c_x}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial z}\right) & 2\frac{\partial c_z}{\partial z} \end{bmatrix} \nabla ;$$

Írjuk ki a sűrűdési tenzor divergenciájának első sorát részletesen:

$$\begin{aligned} (2\mu\mathbf{D}_s)\nabla|_x &= \mu \left[2\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{\partial c_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} + \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \right] = \\ &= \mu \left[\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} \right) \right] = \mu \Delta c_x ; \end{aligned} \tag{15.15}$$

Az alsó sor gömbölyű zárójelben lévő tagja éppen a sebesség divergenciája, ami az összenyomhatatlanság miatt nulla. Ezzel a fenti eredményre jutunk, amit egyszerű számolással ellenőrizni lehet (és ajánlatos is!).

A második és harmadik sor számításával hasonló eredményt kapunk:

$$\operatorname{div} \Pi = \Pi \nabla = - \begin{bmatrix} \partial p / \partial x \\ \partial p / \partial y \\ \partial p / \partial z \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \Delta c_x \\ \Delta c_y \\ \Delta c_z \end{bmatrix} = -\mathbf{grad} p + \mu \Delta \mathbf{c}; \quad (15.16)$$

Ezzel a Navier-Stokes egyenletnek az áramlástanban igen gyakran használt, az összenyomhatatlan közegek áramlására érvényes alakjához jutunk:

$$\frac{d\mathbf{c}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \frac{\mu}{\rho} \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g}; \quad (15.17)$$

Illetve, a baloldal részletesebb kiírásával és a kinematikai viszkozitás bevezetésével:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} + \mathbf{grad} \left(\frac{c^2}{2} \right) - \mathbf{c} \times \mathbf{rot} \mathbf{c} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{grad} p + \nu \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g}; \quad (15.18)$$

Megjegyzendő, hogy az egységnyi tömegre eső, sűrűdésből származó erőt kifejező tagban a sebesség Laplace-operátorszorosa az alábbi módon is írható:

$$\Delta \mathbf{c} = \mathbf{grad}(\operatorname{div} \mathbf{c}) - \mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c}), \quad \text{ha } \operatorname{div} \mathbf{c} = 0 \Rightarrow \Delta \mathbf{c} = -\mathbf{rot}(\mathbf{rot} \mathbf{c});$$

Ebből az következik, hogy összenyomhatatlan közegben csúsztató feszültség ott keletkezik, ahol a sebesség rotációjának rotációja nem nulla.

A hasonlóság elmélete

A Navier-Stokes egyenlet parciális differenciálegyenlet. A matematikában a korrekt kitűzésű probléma definíciójához hozzátartozik a perem és kezdeti feltételek megadása. Ezek a gyakorlatban rendkívül sokfélék lehetnek, ezért a (15.18) egyenlet általános megoldása csak kevés esetre ismert. Napjainkban ugyan nyitott a numerikus megoldás lehetősége, azonban számos esetben elegendő, ha korábbi mérések eredményeire támaszkodva végzünk számításokat.

A mérési eredmények felhasználhatóságát állapíthatjuk meg a hasonlóság-elmélet segítségével. Tekintsük a (15.17) egyenletet és definiáljuk mérés (külön jelölés nélkül) és a tervezett felhasználás (ennek jellemzőit csillaggal jelöltük) között a következő átszámítási tényezőket:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^* M_r; \quad \mathbf{c} = \mathbf{c}^* M_c; \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}^* M_g; \quad \rho = \rho^* M_\rho; \quad p = p^* M_p; \quad \nu = \nu^* M_\nu; \quad (15.19)$$

az idő átszámítási tényezője ezzel: $M_t = M_r / M_c$.

Ezekkel az átszámítási tényezőkkel felírható a mérési esetre vonatkozó egyenlet:

$$\frac{M_c^2}{M_r} \frac{d\mathbf{c}^*}{dt^*} = - \frac{M_p}{M_\rho M_r} \frac{1}{\rho^*} \mathbf{grad}^* p^* + \frac{M_\nu M_c}{M_r^2} \nu^* \Delta^* \mathbf{c}^* + M_g \mathbf{g}^*; \quad (15.20)$$

(i) (ny) (s) (te)

A (15.20) egyenlet egyes tagjai alá, zárójelben a tag fizikai tartalmára jellemző jelet írunk: az „i” az egységnyi tömegre vonatkozó tehetetlenségi erőt, az „ny” az egységnyi tömegre vonatkozó, nyomásváltozásból származó erőt, az „s” az egységnyi tömegre vonatkozó, sűrűdésből származó erőt és végül a „te” a térerősséget jelenti.

A két jelenség pontosan akkor hasonló, ha a mozgásegyenletük csak egyetlen, konstans szorzóban különbözik. Ez pedig pontosan akkor teljesül, ha:

$$\frac{M_c^2}{M_r} = \frac{M_p}{M_\rho M_r} = \frac{M_v M_c}{M_r^2} = M_g ; \quad (15.21)$$

Számítsuk ki a tehetetlenségi („i”) és a sűrűdési („s”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(s)} = \frac{M_c^2}{M_r} \frac{M_r^2}{M_v M_c} = \frac{M_c M_r}{M_v} \Rightarrow Re = \frac{c r}{\nu} ; \quad (15.22)$$

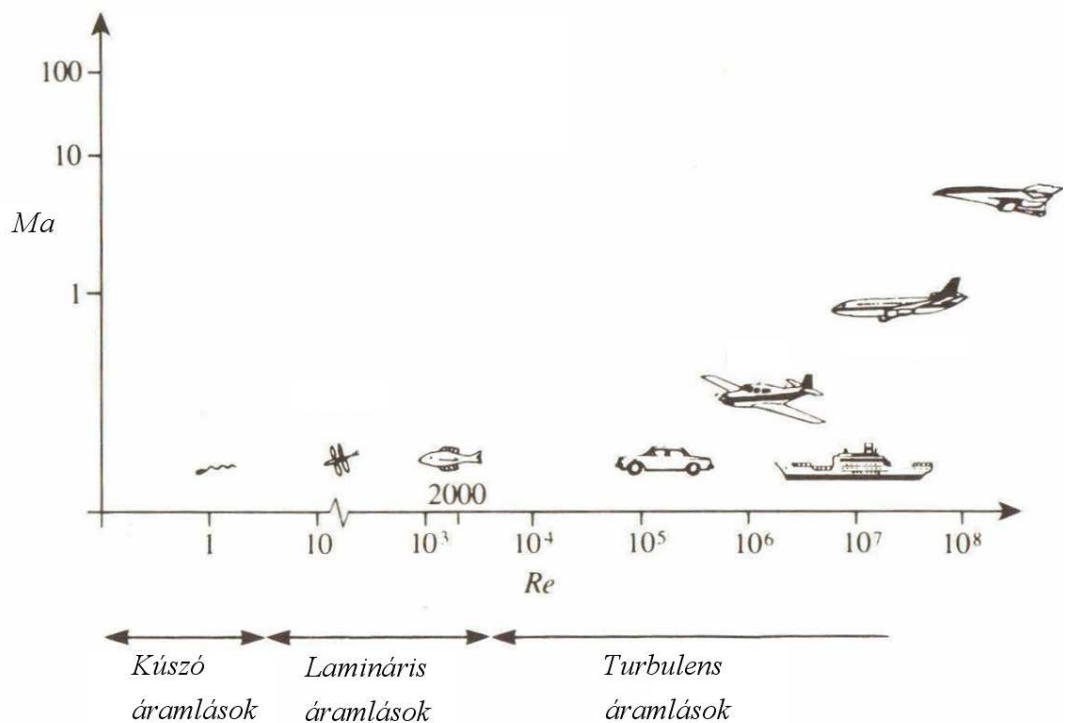
Ez az „Re”-vel jelölt, Reynolds szám. Ez egy hasonlósági kritérium, ami a tehetetlenségi és a sűrűdési erők viszonyát fejezi ki. Itt csak megemlítjük, hogy statisztikus mechanikai értelemben a Reynolds szám a makroszkopikus sebesség és hosszúság, illetve a mikroszkopikus sebesség (a részecskék hőmozgásának átlagsebessége) és a hosszúság (közepes szabad úthossz) hányadosával arányos:

$$Re \sim \frac{c r}{c_{rh} r_{ksz}} ; \quad (15.23)$$

ahol: c_{rh} - a részecskék rendezetlen hőmozgásának átlagsebessége;

r_{ksz} - a részecskék közepes szabad úthossza.

15.4. ábra



A 15.4. ábrán – az érdekesség kedvéért – néhány, jellemző Reynolds számot, illetve Mach számot tüntettünk fel. A „Természet” az ábra bal alsó sarkában látható; az emberkéz alkotta járművek jobb oldalon, illetve magasabban is láthatók – ezekben az esetekben a Reynolds szám, illetve a Mach szám, néhány esetben pedig mindkettő nagyobb, vagy jelentősen nagyobb, mint a természetben előforduló mozgásformákhoz tartozó jellemző számok. Természetesen más példa is létezik, az ábra csak néhány vonatkozást mutat be.

Számítsuk ki a tehetetlenségi („ i ”) és a nyomásváltozásból származó („ ny ”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(ny)} = \frac{M_c^2 M_\rho M_r}{M_r M_p} = \frac{M_c^2 M_\rho}{M_p} \Rightarrow Eu = \frac{c^2 \rho}{p}; \quad (15.24)$$

Ez az Euler-szám. Az Euler számot – bár kevésbé közismert, mint a Reynolds szám – igen elterjedten alkalmazzák például a felhajtóerő vagy az ellenállás tényező számításánál. Erről bővebb ismertek a 18. pontban találhatók.

Határozzuk meg a tehetetlenségi („ i ”) és a térerősségből származó („ t ”) erőket jellemző hányadost:

$$\frac{(i)}{(te)} = \frac{M_c^2}{M_r M_g} \Rightarrow Fr = \frac{c}{\sqrt{r g}}; \quad (15.25)$$

Ez a számot Froude-számnak nevezzük. A Froude szám például szabad felszínű áramlások esetében fontos: ezért ezt a hasonlósági kritériumot gyakran alkalmazzák a hajók áramlástani vizsgálatában.

A (15.17) vagy a (15.18) egyenlet összenyomhatatlan közegek áramlására érvényes. Ezért az összenyomhatóságra vonatkozó hasonlósági számot külön kell bevezetni:

$$Ma = \frac{c}{a}; \quad (14.6)$$

Ez a Mach-szám, amit az áramlási sebesség és a hangsebesség viszonzyszámaként definiálunk. A Mach számot egyébként már korábban, az összenyomható közegek áramlásának vizsgálatakor bevezettük.

A hasonlóság a hasonlósági kritériumok teljesítésével érhető el. A gyakorlatban az összes kritérium egyidejű teljesítése – a triviális esettől eltekintve – nem igazán lehetséges. Ezért szokás az egyes hasonlósági számoknál azt hangsúlyozni, hogy mely problémakörben fontosak. Ez ad gyakorlati iránymutatást arra, hogy egy, adott esetben hogyan rangsoroljuk a hasonlósági kritériumokat. Elsősorban a fontosnak tartott kritérium betartására kell törekedni (ez nagyon sokszor a Reynolds szám, de ideális közeg nagysebességű áramlásában ilyen a Mach szám) és ha ezután mód van rá akkor érdemes foglalkozni a többi kritériummal.

Ez a fejezet főként elméleti anyagrészeket tartalmaz – ezek vagy elméleti kérdésekben, vagy a későbbiekben bemutatandó gyakorlati feladatok részeként fordulnak elő.

A határréteg egy olyan, általában jól körülhatárolható áramlási zóna, ahol a csúsztató feszültség hatása jelentős. Itt meg kell jegyezni, hogy a csúsztató feszültség keletkezésének két, szükséges és elégséges feltétele van: egyrészt a közegnek kell legyen viszkozitása (ez mindig van, de esetenként eltekintünk tőle \Rightarrow ideális közeg), másrészt kell legyen sebességkülönbség. Viszkózus folyadék esetében például, hidrosztatikai probléma esetén nem keletkezik csúsztató feszültség, mivel nincs sebességkülönbség.

A gyakorlatban létrejövő áramlásokban sokszor igen kiterjedten találhatók olyan zónák, amelyekben a sebesség alig változik. Ezekben a zónákban a csúsztató feszültség elhanyagolhatóan kicsi – itt ideális közeggel számolhatunk. Az áramlások fennmaradó része a határréteg, ahol a súrlódás hatását feltétlenül figyelembe kell venni.

Másik oldalról közelítve a határrétegben jelentős sebességváltozást találunk, ilyen pl. egy szilárd test felszínéhez közeli réteg. Innen származik a határréteg elnevezés. (Természetesen másfajta határréteg is létezik, sőt a sebességváltozáson túl a hőmérséklet változás alapján termikus határréteg is definiálható.)

A következőkben a leggyakoribbnak tekinthető, a szilárd fal mellett kialakuló határrétegről – más néven fali rétegről – lesz szó. Ez alapvetően **réteges** (lamináris) vagy **gomolygó** (turbulens) lehet.

A „fali réteg” típusú határrétegben a közeg a falnak energiát ad át, amely energiát a fallal párhuzamos áramlásra merőlegesen, főként a részecske-transzport következtében létrejövő energia-áram fedez. A lamináris határrétegben ez az energia transzport – mivel csak a rendezetlen hőmozgáson alapul – kicsi. Ezért a lamináris határréteg – amikor már nem képes a szükséges energia transzportra – turbulenssé válik. Ezt átmenetnek nevezzük és más kritériumok mellett esetenként kritikus Reynolds számmal jellemezhetjük. Mivel a turbulens mozgás nagyságrendekkel is intenzívebb lehet, mint a hőmozgás, azért itt az energia transzport is (sokkal) intenzívebb. Amennyiben az áramlás fenntartásához ez az energia transzport sem elegendő, akkor jön létre a leválás. A leválásban makroszkopikus méretű örvénylések alakulnak ki.

Ebben a jegyzetben csak kétdimenziós (síkáramlás) határrétegről lesz szó. A határréteg leíró egyenleteit a Navier-Stokes egyenletről vezethetjük le, feltéve, hogy a falra merőleges sebesség komponens (c_y) sokkal kisebb, mint a fallal párhuzamos sebesség összetevő (c_x). A részletes levezetés pl. [10]-ben megtalálható, a végeredmény:

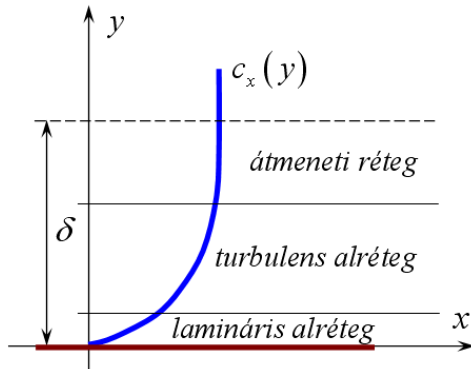
$$c_x \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \frac{\partial c_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial c_x}{\partial y} \right); \quad (16.1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

A (16.1) differenciálegyenlet rendszer összenyomható közeg esetén érvényes, illetve amikor a térerősség hatása elhanyagolható és hőáram sincs. A határréteg jellemzőinek számításához szükséges harmadik egyenlet a folytonosság törvénye:

$$\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0; \quad (16.2)$$

16.1. ábra



Az ábrán egy turbulens határréteg sebesség-profil látható. A falnál („x” tengely), ahol az áramlási sebesség a tapadási feltétel miatt nulla, található egy lamináris alréteg. Ezután következik – gomolygó határréteg esetén – a turbulens alréteg. Végül a turbulens réteg egy átmeneti rétegen keresztül megy át a „végtelen” vagy zavartalan áramlásba, ahol már csúsztató feszültség (lényegében) nem ébred. Az ábrán „ δ ” a határréteg vastagságát jelenti.

Vizsgáljuk meg ennek a határrétegnek a sebesség profilját. Prandtl nyomán tegyük fel, hogy a lamináris és a turbulens alrétegben a csúsztató feszültség nem változik, végig egyenlő a fali csúsztató feszültséggel:

$$\tau = \tau_0 \text{ (}\tau_0 \text{ a fali csúsztató feszültség);}$$

Definiáljuk a súrlódási sebességet az alábbi módon (a súrlódási sebesség „köze” a sebességekhez csak annyi, hogy a dimenziója sebesség-dimenzió):

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}; \quad (16.3)$$

Határozzuk meg a lamináris alréteg sebesség-profilját. Ezt a lamináris áramlásra érvényes csúsztató feszültség alapegyenletéből kiindulva tehetjük meg:

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow (u^*)^2 = \nu \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \frac{dc_x}{u^*} = \frac{u^*}{\nu} dy; \quad (16.4)$$

A fenti egyenlet mindkét oldala, a legutolsó formájában dimenziótlan. Integráljuk az egyenlet mindkét oldalát:

$$\int \frac{dc_x}{u^*} = \int \frac{u^*}{\nu} dy \Rightarrow \frac{c_x}{u^*} = \frac{u^* y}{\nu}, \quad u^+ = \frac{c_x}{u^*}, \quad y^+ = \frac{u^* y}{\nu} \Rightarrow u^+ = y^+; \quad (16.5)$$

Vagyis a lamináris alrétegben a sebességprofil egyenlete szerint a dimenziótlan sebesség egyenlő a dimenziótlan távolsággal. Ezek értéke nullától közelítőleg tízig változik ($0 \leq u^+ = y^+ \leq \sim 10$). Az integrálás miatt egy állandó is bekerült volna (16.5)-be, azonban könnyen belátható, hogy a nulla dimenziótlan koordinátánál a dimenziótlan sebesség nulla – így az állandó értéke is nulla.

A turbulens alrétegben a Prandtl hipotézis ((15.11) és (15.12)) segítségével számíthatjuk ki a sebesség-profil:

$$\tau = \tau_0 = \mu_t \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow \frac{\tau_0}{\rho} = \nu_t \frac{dc_x}{dy} \Rightarrow (u^*)^2 = \kappa^2 y^2 \left| \frac{dc_x}{dy} \right| \frac{dc_x}{dy}; \quad (16.6)$$

Feltéve, hogy az áramlás nem válik le, azaz a sebesség iránya nem változik, az abszolút érték elhagyható. Ekkor viszont minden (16.6)-beli tag a négyzetben lesz, négyzetgyökvonás után írható:

$$u^* = \kappa y \frac{d c_x}{d y} \Rightarrow \frac{d c_x}{u^*} = \frac{1}{\kappa} \frac{d y}{y} \Rightarrow \frac{c_x}{u^*} = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y) + \text{állandó}; \quad (16.7)$$

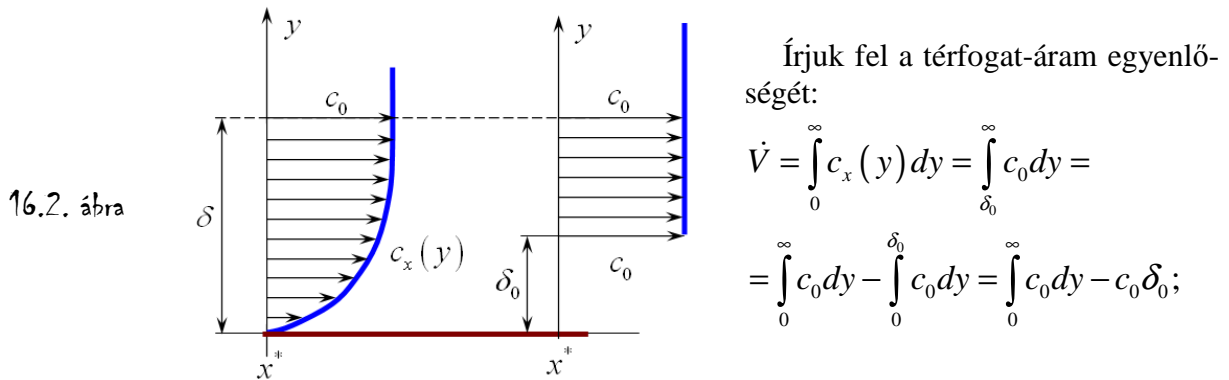
Ennek az egyenletnek a jobb oldalára ismét behozható a dimenziótlan távolság, csak ekkor egy másik állandóra lesz szükség (ennek egyik gyakori számértékét rögtön beírjuk):

$$\begin{aligned} \frac{c_x}{u^*} = u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y) + \text{állandó} &\Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^* y}{\nu}\right) - \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{u^*}{\nu}\right) + \text{állandó}; \\ \Rightarrow u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5. \end{aligned} \quad (16.8)$$

Ez a nevezetes, logaritmusos fal-törvény, ami a turbulens áramlások vizsgálatának egyik korai eredménye, és amely törvényt mind a mai napig, a legkorszerűbbnek tekintett numerikus vizsgálatokban is alkalmazzák. Az összefüggés az $y^+ \leq 10^5$ értékig ($u^+ \leq 37.5$) alkalmazható.

A lamináris alréteg, illetve a turbulens alréteg sebességprofiljával bővebben pl. [1], a „Súrlódásos folyadék áramlásának törvényei” c. részben foglalkozik. Az átmeneti réteg vizsgálatával e jegyzetben nem foglalkozunk – az érdeklődő bőséges szakirodalmat találhat, amely a határréteggel részletesen foglalkozik.

Kiszámíthatjuk a határréteg **kiszorítási vastagságát** is, amely, a 16.2. ábra szerint az a faltól mért távolság, amennyivel az áramlásnak a faltól távolabb kellene kezdődnie ahhoz, hogy az adott „ x^* ” koordinátánál állandó sebesség mellett ugyanaz a térfogat-áram haladjon át.



A (16.8) jobb oldalán az állandó sebességgel vett térfogat áram kifejezése látható. Innen a kiszorítási vastagság egyszerűen megkapható:

$$\delta_0 = \frac{1}{c_0} \int_0^{\infty} (c_0 - c_x(y)) dy = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{c_x(y)}{c_0}\right) dy; \quad (16.9)$$

A (16.9)-ben kijelölt integrál elvileg nullától végtelenig számítandó, a gyakorlatban azonban a számítás jóval kisebb „ y ” értéknél abbahagyható, hiszen az integrálandó függvény értéke gyakorlatilag zérus lesz.

Napjainkban a határréteg jellemzőit (is) sok esetben numerikus módszerekkel számítják. E numerikus módszerek közül az egyik legegyszerűbb, a véges differenciákon alapuló, explicit megoldási módszert mutat be [10].

Mintafeladat

I. feladat: víz áramlásakor kialakuló határréteg turbulens alrétégeiben, az $y^+ = 5000$ -nél a fizikai sebesség $u = 0.3 \text{ m/s}$. Határozza meg a fali csúszató feszültséget és a lamináris alrétég dimenziós vastagságát. (A lamináris alrétég $y^+ = 10$ -ig tart, a kinematikai viszkozitás: $\nu = 1.3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$; és $\kappa = 0.4$).

Megoldás: a logaritmikus faltörvény (16.8) szerint kiszámítható az $y^+ = 5000$ -hez tartozó, dimenziótlan sebesség:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5.5 = \frac{1}{0.4} \ln(5000) + 5.5 \cong 26.8. \quad (16.10)$$

A sűrűlási sebesség (16.3) szerint számítható:

$$u^+ = \frac{u}{u^*} \Rightarrow u^* = \frac{u}{u^+} = \frac{0.3}{26.8} = 0.0112 \text{ m/s}. \quad (16.11)$$

A fali csúszató feszültség (16.3)-ból fejezhető ki:

$$u^* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \Rightarrow \tau_0 = \rho (u^*)^2 = 1000 \cdot 0.0112^2 = 0.125 \text{ Pa}. \quad (16.12)$$

Végül, a lamináris alrétég dimenziós vastagságát számítjuk ki, a (16.5)-ben szereplő definíció felhasználásával:

$$y^+ = \frac{y u^*}{\nu} \Rightarrow y = \frac{y^+ \nu}{u^*} = \frac{10 \cdot 1.3 \cdot 10^{-6}}{0.0112} = 0.00116 \text{ m} = 1.16 \text{ mm}. \quad (16.13)$$

A [7] példatárban – sajnos – határréteggel foglalkozó példa nem található. Ennek oka az is, hogy a határrétegek jellemzőit napjainkban legtöbbször numerikus módszerekkel határozzák meg.

II. feladat: síklap mentén, a lappal párhuzamos áramlásban – feltéve, hogy a statikus nyomás állandó – a lamináris határréteg sebességprofilját, [8] szerint, közelítőleg az alábbi sebesség-profillal írhatjuk le:

$$\frac{c_x(y/\delta)}{c_0} = 1.5 \left(\frac{y}{\delta} \right) - 0.5 \left(\frac{y}{\delta} \right)^3 \text{ ha } \frac{y}{\delta} \leq 1, \text{ és ahol } \delta \text{ a határréteg vastagsága.} \quad (16.14)$$

Határozzuk meg a kiszorítási vastagság teljes határréteg vastagsághoz viszonyított értékét!

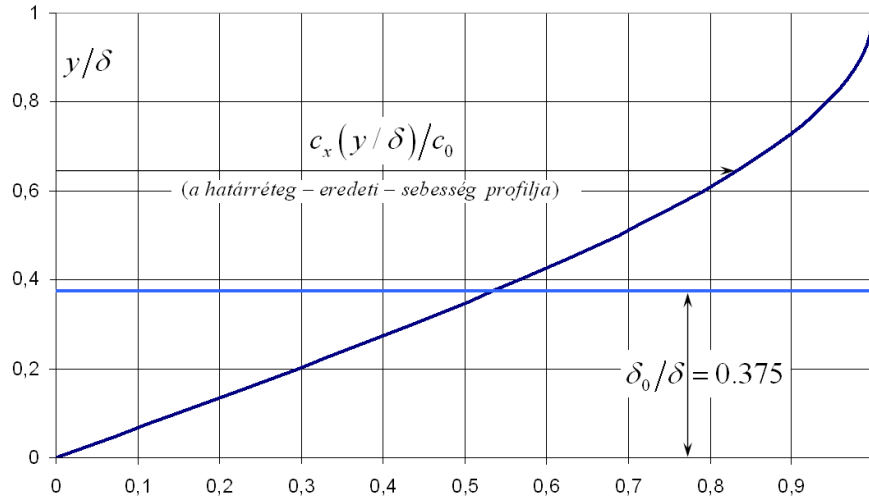
Megoldás: a számítást (16.9) segítségével végezzük – de az „ y ” változó helyett „ y/δ ”-val számolunk, illetve az integrálást nem a végtelenig, hanem csak a határréteg széléig végezzük (itt $y = \delta \Rightarrow y/\delta = 1$), hiszen ezután a sebesség-különbség azonosan nulla:

$$\frac{\delta_0}{\delta} = \int_0^1 \left[1 - \frac{c_x(y/\delta)}{c_0} \right] d(y/\delta). \quad (16.15)$$

A (16.15) integrált akár numerikusan, akár zárt alakban is kiszámolhatjuk – ez utóbbi esetben az alábbi módon járhatunk el, illetve a következő végeredmény adódik:

$$\frac{\delta_0}{\delta} = \int_0^1 [1 - 1.5\eta + 0.5\eta^3] d\eta = [\eta - 0.75\eta^2 + 0.125\eta^4]_0^1 = 0.375 \quad (\eta = y/\delta). \quad (16.16)$$

16.3. ábra



A 16.3. ábrán feltüntettük az eredeti sebesség profilt és a kiszorítási vastagsággal módosított sebesség eloszlást is – ez utóbbi feljebb, a $\delta_0/\delta = 0.375$ -nél kezdődik és állandó ($c_x/c_0 \equiv 1$) értékű.

III. feladat: a II. feladathoz hasonlóan síklap mentén kialakuló, de most *turbulens* határréteget vizsgálunk. A határréteg sebesség eloszlása, [8] nyomán:

$$\frac{c_x(y/\delta)}{c_0} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n}, \quad \text{ahol } n = 6.4, 7.8, 9.4 \text{ ha } \text{Re}_x = 10^5, 10^6, 10^7 \quad (\text{Re}_x = c_0 x/\nu). \quad (16.17)$$

Megjegyzendő, hogy a fenti sebesség eloszlás – (16.14)-hez hasonlóan – csak a határrétegen belül érvényes ($y/\delta \leq 1$), a határrétegen kívül a sebességet – e feladatban – állandónak vesszük. A feladat: számítsuk ki a kiszorítási vastagság teljes határréteg vastagsághoz viszonyított értékét, a $\text{Re}_x = 10^6$ Reynolds szám esetére!

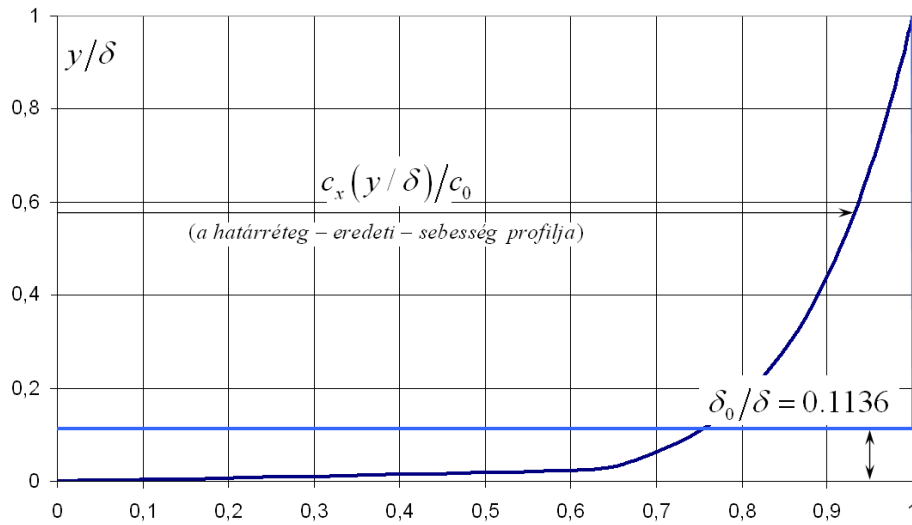
Megoldás: A számolást az előző megoldásnál alkalmazott módon végezhetjük:

$$\frac{\delta_0}{\delta} = \int_0^1 \left[1 - \frac{c_x(\eta)}{c_0}\right] d\eta = \int_0^1 \left[1 - \eta^{\frac{1}{7.8}}\right] d\eta = \left[\eta - \frac{7.8}{8.8} \eta^{\frac{8.8}{7.8}}\right]_0^1 = 0.1136. \quad (16.18)$$

Az eredeti és a kiszorítási vastagsághoz rendelt sebesség eloszlást a 16.4. ábrán tüntettük fel. A 16.3. és 16.4. ábra segítségével összehasonlítható a lamináris és a turbulens határréteg sebesség profilja. Megállapítható, hogy míg a turbulens határréteg sebességprofilja a faltól indulva igen meredeken változik, addig a lamináris határréteg sebesség profilja nem mutat nagy változást. A falnál értelmezhető változás, pontosabban a sebesség „y” szerinti deriváltja meghatározza a fali csúsztató feszültséget: ez, a fentiek alapján a turbulens határréteg esetében sokkal nagyobb, mint a lamináris esetben. Turbulens határréteg esetén tehát – elegendően nagy Reynolds szám esetén – nagyobb lesz a súrlódási ellenállás, mint a lamináris esetben.

A határrétegek sebesség profiljából következik az is, hogy amíg a lamináris határréteg esetén a kiszorítási vastagság a határréteg teljes vastagságának majdnem 38%-a, addig az általunk vizsgált turbulens esetben ez alig haladja meg a 11%-ot.

16.4. ábra



A 16.4 ábrán látható sebesség profil egyébként egy, konkrét példája a 16.1 ábrán vázolt sebesség profilnak. Csak megemlítjük, hogy ennek megfelelően osztható fel tehát a fenti, turbulens határréteg is a megfelelő alrétegekre.

A Bernoulli egyenlet ideális közegre érvényes, általános alakját (7.16) láttatja. A Bernoulli egyenletnél igen fontos feltétel, hogy a két pont között, amelyek közé az egyenletet felírjuk, nem lehet energia be- vagy elvezetés.

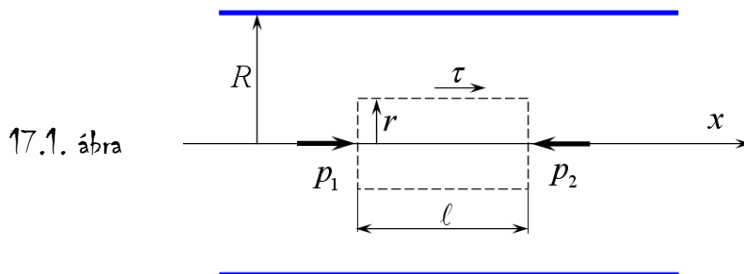
A súrlódás energiaelvezetést jelent, ezért a Bernoulli egyenletet ki kell egészíteni az energia megmaradás elvének megfelelően úgy, hogy a súrlódási veszteséget hozzáadjuk annak a pontnak a jellemzőihez, ahonnan az hiányozna. Az így felírt egyenletet nevezzük kiterjesztett Bernoulli egyenletnek. Induljunk ki (12.3)-ból:

$$\frac{c_1^2}{2} + U_1 + \frac{p_1}{\rho} = \int_1^2 \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial t} \right)^T d\mathbf{s} + \frac{c_2^2}{2} + U_2 + \frac{p_2}{\rho} + \sum \frac{\Delta p'}{\rho}; \quad (17.1)$$

A (17.1) felírásakor igen fontos hangsúlyozni azt, hogy e felírási mód esetén az áramlásban az „1”-es pontot követi a „2”-es. A súrlódási veszteségeket a $\sum \frac{\Delta p'}{\rho}$ tag fejezi ki – ezek jelentkeznek az „1”-es ponttól a „2”-es pontig. A veszteségek figyelembe vételével állítjuk helyre az egyenlőséget. A következőkben a súrlódási veszteségeket számítjuk ki, a gyakorlatban legfontosabb esetekre.

Hosszú, egyenes cső nyomásvesztésének számítása

Vizsgáljuk meg először azt az esetet, amikor a csőben lamináris az áramlás.



17.1. ábra

Az ábrán látható cső-áramlásban egy hengert határoltunk el gondolatban. A rá ható, nyomásból, illetve súrlódásból származó erők egyensúlyban vannak, mivel az áramlás stacionárius.

Az ábrán és a számítás első lépésében a csúszató feszültséget – automatikusan – pozitívnak választottuk. A további számításokból kiadódik a csúszató feszültség negatív előjele – de ezt nem nekünk kell előírni, hanem a számítás szolgáltatja (17.6). Írjuk fel a hengerre ható erőket:

$$0 = (p_1 - p_2) r^2 \pi + \tau 2\pi r l; \quad \tau = \mu \frac{dc_x}{dr}; \quad (17.2)$$

A (17.2)-ből, behelyettesítés és átrendezés után az alábbi közös differenciálegyenlethez jutunk:

$$-r(p_1 - p_2) = 2\ell\mu \frac{dc_x}{dr}; \quad (17.3)$$

Ezt az egyenletet a változók szétválasztása után egyszerűen integrálhatjuk. Az eredmény, egy integrálási állandó bevezetésével:

$$c_x(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{r^2}{2} + Const.; \quad \text{és: } c_x(R) = 0; \quad (17.4)$$

Az állandó értékét a (17.4)-nél megadott peremfeltételből kiszámítva, az alábbi, forgási paraboloid egyenletének megfelelő egyenlettel meghatározott sebesség eloszlást kapjuk:

$$c_x(r) = \frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{R^2 - r^2}{2}; \quad c_{x,ÁTLAG} = \frac{c_{x,MAX}}{2} = \frac{1}{2} \frac{p_1 - p_2}{2\ell\mu} \frac{R^2}{2} = c \quad (\text{az } r=0\text{-nál}). \quad (17.5)$$

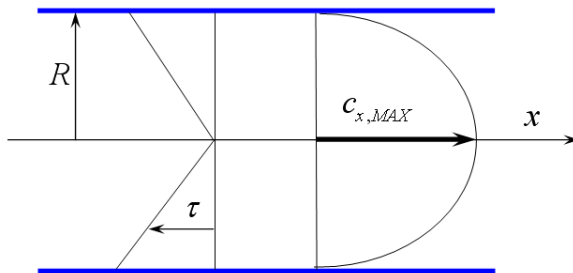
A sebesség eloszlás egyenlete hasonló a hidrosztatikában, a nehézségi erőterben forgó edényben kialakuló folyadék-felszín egyenletéhez (17.2. ábra), illetve az ottaniak szerint az átlag érték éppen a maximális érték fele. Ezt a későbbiekre tekintettel egyszerűen „c”-vel jelöljük, ez lesz ui. általában az átlagsebesség jele.

Egy egyenes, állandó keresztmetszetű csőben, állandó sűrűségű, súrlódásos folyadék esetében a nyomás az áramlás irányában csökkenni fog ($p_1 > p_2$). Ez azt jelenti, hogy a (17.5)-tel adott sebesség-profil pozitív értékeket vesz fel.

A csúsztató feszültség (17.3)-ból egyszerűen számítható:

$$\tau(r) = \mu \frac{dc_x}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell} r; \quad \tau_0 = -\frac{p_1 - p_2}{2\ell} R; \quad (17.6)$$

17.2. ábra



A csúsztató feszültség a sugárral arányosan (lineárisan) változik, a középvonalon nulla, a falnál a legnagyobb. Előjele negatív – ez az áramlás sebesség-eloszlásából fizikailag következik, de a negatív előjelet a számításból kapjuk – ez jól példázza a fizika és a matematika egységét.

Fejezzük ki (17.5)-ből a nyomásvesztést, illetve a nyomásvesztés és a sűrűség hányadosát:

$$\Delta p' = p_1 - p_2 = \frac{c 8\ell\mu}{R^2} = \frac{c 32\ell\rho\nu}{D^2}; \quad \frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c 32\ell\nu}{D^2}; \quad (17.7)$$

A (17.7)-et, a Reynolds szám bevezetésével a következő alakba is írhatjuk:

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c 32\ell\nu}{D^2} = \frac{c^2}{2} \frac{2 \cdot 32}{(Dc/\nu)} \frac{\ell}{D} = \frac{c^2}{2} \frac{64}{\text{Re}} \frac{\ell}{D} = \frac{c^2}{2} \lambda \frac{\ell}{D}; \quad \text{ahol: } \text{Re} = \frac{Dc}{\nu} \text{ és } \lambda = \frac{64}{\text{Re}}. \quad (17.8)$$

Ezzel tulajdonképpen eljutottunk az állandó keresztmetszetű egyenes csőben történő, összenyomhatatlan folyadék áramlásában fellépő nyomásvesztés számításának általános kifejezéséhez:

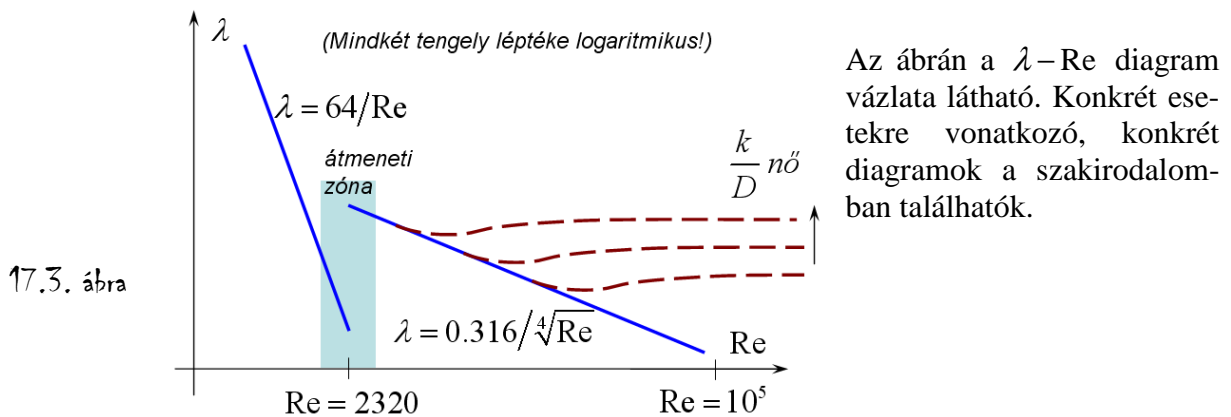
$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{c^2}{2} \lambda \frac{\ell}{D}; \quad \text{ahol: } \lambda \text{ a csőszűrlődési tényező}; \quad (17.9)$$

$$\lambda = \begin{cases} 64/\text{Re} & \text{lamináris áramlásban} \\ 0.316/\sqrt[4]{\text{Re}} & \text{turbulens áramlásban, hidraulikai simaság esetén, ha } \text{Re} < 10^5 \\ \text{értéke } \lambda - \text{Re diagrammból választandó} & \text{egyéb esetekben} \end{cases}$$

A (17.9) kifejezésnél megjelent a hidraulikai simaság fogalma. Ez a fogalom azt jelenti, hogy a felületi érdesség átlagos értéke (k) kisebb, mint a határreteg vastagsága (δ). Másképpen kifejezve, azt jelenti, hogy a hidraulikailag sima csőben a határreteg elfedi az érdességet.

Ez lamináris áramlás esetén mindig teljesül, hiszen az egész áramlás „határreteg” jellegű, a teljes keresztmetszetben van csúsztató feszültség (a csúsztató feszültség egyedül a középvonalon nulla). Ezek szerint a lamináris csőáramlás esetében a csövek mindig hidraulikailag simák.

Turbulens áramlás esetén a csőfal mellett viszonylag vékony határreteg alakul ki, illetve ez a határreteg az átlagsebesség (és a Reynolds szám) növekedésével vékonyodik. Vagyis adott átlagos érdességű csőfal (k) esetén a csőfal, az átlagsebesség növekedésekor általában hidraulikailag érdessé válik – ez is megfigyelhető a 17.3. ábrán.



A kör keresztmetszetű csövek mellett léteznek más keresztmetszetek is. A Reynolds számot a cső átmérőjével definiáltuk – nem kör keresztmetszetű vagy kör keresztmetszetű, de közeggel nem teljesen kitöltött csövek esetén a hidraulikai átmérőt szokás bevezetni:

$$D_H = \frac{4A}{K}; \quad (17.10)$$

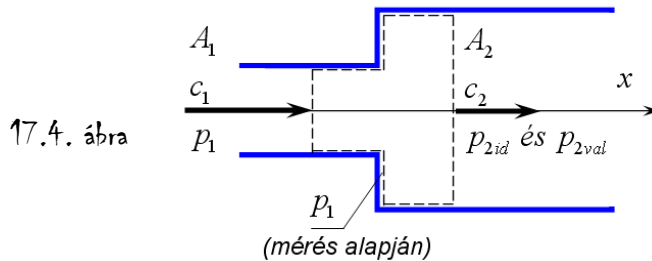
(17.10)-ben, a számlálóban a folyadék keresztmetszete (A), a nevezőben a nedvesített kerület (K) található. A nedvesített kerület az a kerület-rész, amelyen a folyadék súrlódása lényeges. Ez rendszerint az a kerület-rész, amit szilárd fal alkot.

A Borda-Carnot veszteség

A csővezetékben előfordulnak hirtelen keresztmetszet növekedések. Ezekben nyomásvesztés alakul ki. A nyomásvesztést a 17.4. ábrán vázolt helyzetnek megfelelően hatá-

rozzuk meg. Írjunk fel először ideális közegre érvényes Bernoulli egyenletet az „1”-es és „2”-es pont közé:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_{2id}}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} \Rightarrow p_{2id} - p_1 = \frac{\rho}{2}(c_1^2 - c_2^2) = \frac{\rho}{2}(c_1 - c_2)(c_1 + c_2); \quad (17.11)$$



Írjuk fel az impulzus tételt is – de ezt valóságos áramlásra. Az áramlás valóságos voltát úgy vesszük figyelembe, hogy az ellenőrző felületen, a hirtelen keresztmetszet növekedésnél p_1 nyomást írunk elő. Válasszuk a 17.4. ábrán látható ellenőrző felületet, ekkor:

$$-c_1(\rho A_2 c_2) + c_2(\rho A_2 c_2) = p_1 A_1 + p_1(A_2 - A_1) - p_{2val} A_2 = (p_1 - p_{2val}) A_2; \quad (17.12)$$

(itt: $\dot{m} = \rho A_2 c_2 = \text{állandó}$).

A valóságos nyomásnövekedés tehát:

$$p_{2val} - p_1 = (c_1 - c_2) \rho c_2; \quad (17.13)$$

A nyomásvesztéget megkapjuk, ha az ideális nyomásnövekedésből kivonjuk a valóságot; ezzel megkapjuk a Borda-Carnot veszteség kifejezését:

$$\Delta p' = (p_{2id} - p_1) - (p_{2val} - p_1) = \frac{\rho}{2} [(c_1 - c_2)(c_1 + c_2) - 2(c_1 - c_2)c_2] = \frac{\rho}{2}(c_1 - c_2)^2; \quad (17.14)$$

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \frac{(c_1 - c_2)^2}{2};$$

A Borda-Carnot veszteség azon alakját, amikor a kilépő keresztmetszet (gyakorlatilag) végtelen, kilépési veszteségnek nevezzük. Ez a kilépési veszteségnek számos esetben jelentős szerepet játszik. A kilépési veszteség egyébként azt jelzi, hogy az a mozgási energia, amit a közeg a kilépésekor magával visz, elvesz, nem tudjuk (egyszerűen) hasznosítani.

Rövid elemek vesztesége

A rövid elemek, idomdarabok, szelepek, csapok vesztesége, formailag igen egyszerűen adható meg:

$$\frac{\Delta p'}{\rho} = \zeta \frac{c^2}{2}; \quad (17.15)$$

Az itt szereplő veszteségtényező (ζ) értékét az egyes esetekre mérésből, kézikönyvekből, táblázatokból határozhatjuk meg.

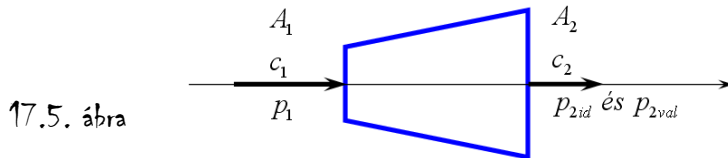
A diffúzor hatásfok

A diffúzor egy, egyszerű, áramlástanai gép, a feladata az, hogy a közeg kinetikai energiájának csökkentése révén a statikus nyomást növelje. Mint ilyennek nem egyszerűen a veszteségét, hanem a hatásfokát szokás definiálni:

$$\eta_{diff} = \frac{\Delta p_{val}}{\Delta p_{id}}; \quad (17.16)$$

A diffúzoroknak általában létezik egy legjobb kúposága. Ha ennél a kúposágnál jobban tágul a diffúzor, akkor a falai mentén növekvő nyomás ellenében áramló közeg a falakról leválik. A leválással járó örvénylés megnöveli a veszteséget.

Amennyiben a diffúzor kúposága túl kicsi, vagyis kisebb, mint a leválás elkerüléséhez szükséges kúposág, akkor a súrlódási veszteségek rontják a diffúzor hatásfokát. A diffúzoron, ideális közeg átáramlása esetén bekövetkező nyomásnövekedés a Bernoulli egyenlet alapján számítható.



A 17.5. ábrán látható diffúzorban létrejövő, ideális nyomásnövekedés számítása.

$$(p_{2id} - p_1) = \frac{\rho}{2}(c_1^2 - c_2^2) = \Delta p_{id}$$

A diffúzoron létrejövő nyomásvesztés tehát:

$$\Delta p'_{diff} = \Delta p_{id} - \Delta p_{val} = (1 - \eta_{diff}) \Delta p_{id}; \quad (17.17)$$

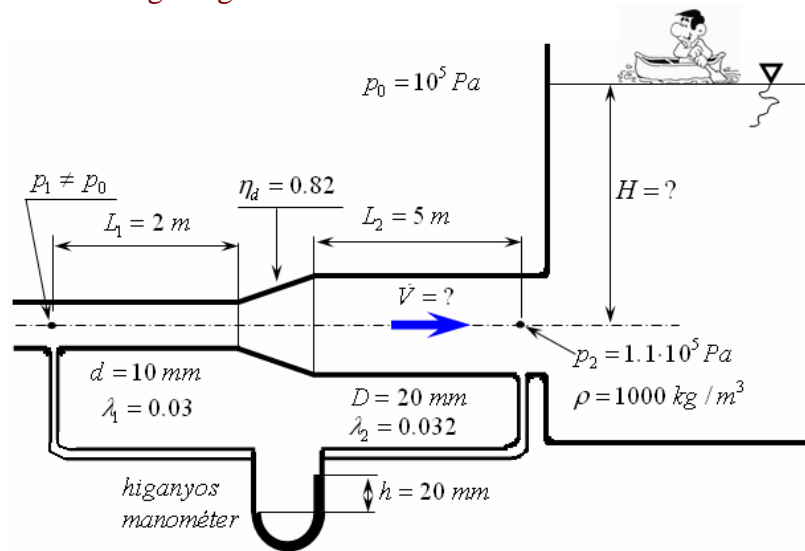
A súrlódásos közegekre kiterjesztett Bernoulli egyenlet alkalmazására példák a [7] 15. fejezetében találhatóak.

Mintafeladat

Számos, ide vágó példa található a [7] példatár a 15. „Súrlódásos áramlás csőben” c. fejezetében és a 16. „Súrlódásos áramlás testek körül” c. fejezetében.

Feladat: meghatározandó a 17.6. ábrán látható csővezetékben kialakuló térfogat-áram és a vízfelszín csőtengelytől mért magassága.

17.6. ábra



Megoldás: a feladat megoldásához szükséges kiinduló adatok a 17.6. ábráról leolvashatók. A megoldás a kiterjesztett Bernoulli egyenlet (17.1) stacionárius áramlásra vonatkozó alakjának segítségével kereshető meg. Írjuk fel ezt az egyenletet először az ábrán is látható „1”-es és „2”-es pont közé:

$$\left(\frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) + (U_1 - U_2) + \left(\frac{p_1}{\rho_{\text{víz}}} - \frac{p_2}{\rho_{\text{víz}}} \right) = \sum \frac{\Delta p'}{\rho_{\text{víz}}}; \quad (17.18)$$

Elemezzük a (17.18) egyenlet egyes tagjait. Tekintsük először a két sebességet. Ezek között a folytonosság törvénye teremt kapcsolatot:

$$c_1 A_1 = c_2 A_2 \quad (\text{mert } \rho_{\text{víz}} = \text{áll.}) \Rightarrow c_1 d^2 = c_2 D^2 \Rightarrow c_1 = 4c_2; \quad (17.19)$$

A két potenciál – feltéve, hogy a két pont egyforma magasságban van – értéke azonos. Ezek egymást kiejtik, a következőkben nem számolunk velük.

Határozzuk meg ezután a statikus nyomások különbségét. Feltesszük, hogy a csőben lévő magasságváltozás hatása elhanyagolható, vagyis a statikus nyomás a teljes csőkeresztmetszetben (mindkettőben!) azonos a cső középvonalán felvett pontokban számított statikus nyomással. A 17.6. ábrán látható, „U” csöves nyomásmérő tehát a keresett statikus nyomások különbségét méri. A hidrosztatika fejezetben leírtak szerint számíthatjuk ki ezt a nyomás különbséget:

$$p_1 - p_2 = (\rho_{\text{higany}} - \rho_{\text{víz}}) gh = 12600 \cdot 9.81 \cdot 0.02 \cong 2472 \text{ Pa}. \quad (17.20)$$

Ki kell még számítani az 1-es és 2-es pont közötti, súrlódásból származó nyomásvesztést. Ez három részből tevődik össze: az első a kisátmérőjű, egyenes cső nyomásvesztés-

tesége, a második a diffúzor nyomásvesztése és a harmadik a nagyátmérőjű, egyenes cső nyomásvesztése:

$$\sum \frac{\Delta p'}{\rho} = \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{c_1^2}{2} + (1 - \eta_d) \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{c_2^2}{2}; \quad (17.21)$$

Helyettesítsük be ezeket a részeredményeket a kiterjesztett Bernoulli egyenletbe, és a folytonosság törvényének alapján kapott eredmény szerint küszöböljük ki a c_1 sebességet:

$$\left(\frac{16c_2^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right) + \left(\frac{p_1 - p_2}{\rho_{\text{víz}}} \right) = \left[\lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{16c_2^2}{2} + (1 - \eta_d) \frac{16c_2^2 - c_2^2}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{c_2^2}{2} \right]; \quad (17.22)$$

A (17.22)-ben már csak a „2”-es pontbeli sebesség az ismeretlen. A kifejezés egyszerűbbé tétele érdekében vezessük be a következő, összefoglaló mennyiséget:

$$\begin{aligned} A &= \lambda_1 \frac{L_1}{d} \frac{16}{2} + (1 - \eta_d) \frac{15}{2} + \lambda_2 \frac{L_2}{D} \frac{1}{2} = \\ &= 0.03 \cdot \frac{2}{0.01} \frac{16}{2} + (1 - 0.82) \frac{15}{2} + 0.032 \cdot \frac{5}{0.02} \frac{1}{2} = 53.35. \end{aligned} \quad (17.23)$$

Ezzel:

$$c_2^2 (7.5 - 53.35) = -(2472/1000) \Rightarrow c_2 = 0.232 \text{ m/s}. \quad (17.24)$$

A térfogat-áram pedig:

$$\dot{V} = (D^2 \pi / 4) c_2 = (0.02^2 \pi / 4) \cdot 0.232 = 0.000073 \text{ m}^3/\text{s}. \quad (17.25)$$

A második kérdés a „H” magasság értéke. Ennek számítására ismét a kiterjesztett Bernoulli egyenletet használjuk, de most a „2”-es pont és a „csónakos” (jele: 0) pont közé felírva:

$$\frac{p_2}{\rho_{\text{víz}}} + \frac{c_2^2}{2} = \frac{p_0}{\rho_{\text{víz}}} + U_0 + \sum \frac{\Delta p'}{\rho_{\text{víz}}} = \frac{p_0}{\rho_{\text{víz}}} + g H + \frac{c_2^2}{2}; \quad (17.26)$$

(17.26)-ban, veszteségként már csak a kilépési veszteséget kell szerepeltetni. Innen a keresett magasság egyszerűen számítható:

$$H = \frac{p_2 - p_0}{\rho_{\text{víz}} g} = \frac{10000}{1000 \cdot 9.81} \approx 1 \text{ m}. \quad (17.27)$$

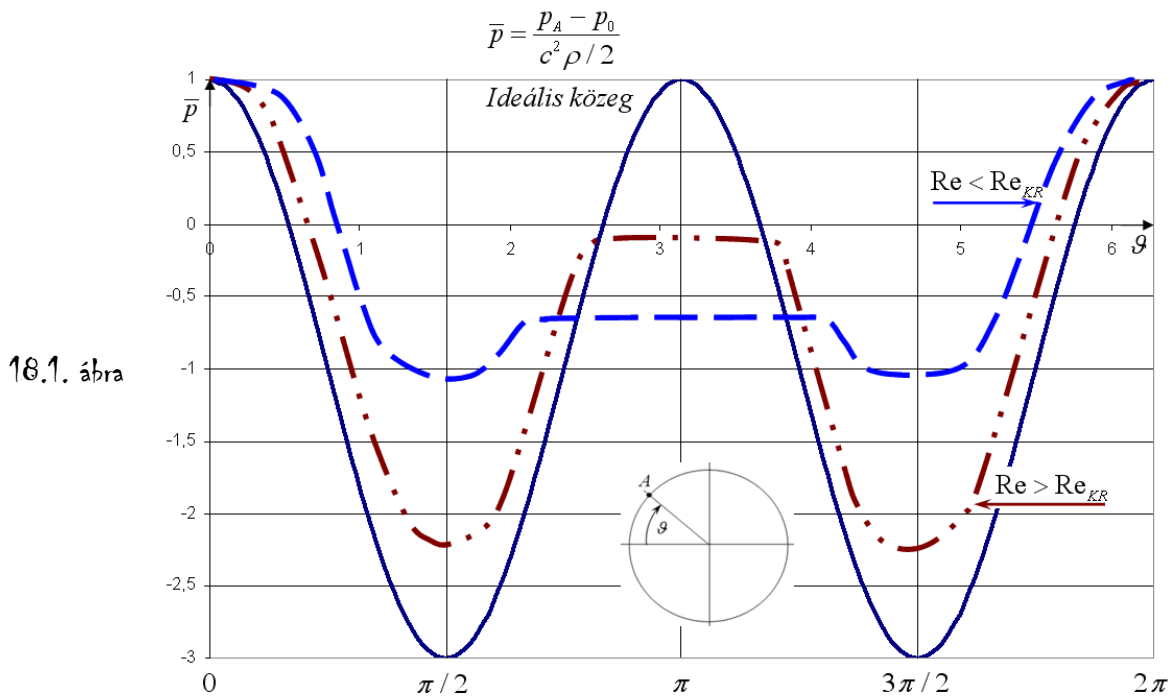
A testek körüli áramlás olyan áramlás, amikor egy testet elvileg végtelen folyadéktér vesz körül és vagy a folyadék, vagy a test mozog, esetleg mindkettő mozog. Ez utóbbira példa egy repülőgép, amely mozgó levegőben (pl. turbulens atmoszféra) repül.

Áramlástan szempontból csak az egymáshoz képesti mozgás az érdekes – a következőkben, amint azt a cím is jelzi, úgy tekintjük, hogy a közeg áramlik a test körül. Erre egy gyakorlati példa lehet egy ún. szélcsatorna, ahol a szélcsatornában létrehozott légáramlásban valamely testet (modellt) szokás vizsgálni.

A „test” egy általános kategória – ide sorolhatóak például – sok más között – a járművek is. A testek lehetnek áramvonalasak és nem áramvonalasak. De az áramvonalasság relatív: bizonyos megfúvási (áramlási) irányok esetén a test lehet áramvonalas, más megfúvási irányok esetén pedig nem áramvonalas. A nem áramvonalas testeket esetenként tompa testnek is nevezik.

Tompa testek

A tompa testek közül kiemelten fontos a henger és a gömb. A henger körüli, ideális közeg esetében kialakuló áramlással már korábban foglalkoztunk (9. pont, (9.10) – (9.13) összefüggés). A henger körül ideális és valóságos viszonyok között kialakuló áramlás nyomáseloszlása – nyomás tényezője – látható a 18.1. ábrán.



A valóságos áramlásban kialakuló nyomástényező eloszlás lényegesen különbözik az ideális közeg esetén alakuló nyomástényező eloszlástól. Ez a különbség első sorban a henger megfúvással ellentétes, hátsó oldalán jelentkezik: a valóságos közeg a hengert nem tudja tökéletesen körüláramolni, a henger mögött örvényes leválási zóna alakul ki.

Az ebben a zónában kialakuló örvényeket Kármán féle örvénysornak nevezik – ezek az áramlástan és aerodinamika számos területén bírnak rendkívül nagy jelentőséggel.

Valóságos közeg henger körüli áramlása esetén, amikor az áramlási sebesség, azaz a Reynolds szám kicsi, csak lamináris határreteg alakul ki a henger körül. Ez a határreteg csak kis energiátranzportra képes, ezért hamar leválk. Ez hamar, kb. $\vartheta = 80^\circ$ körülfogási szögnél következik be. Ezután, a fennmaradó ív mentén levált, örvényes zóna áll elő. Ezt láttatja a 18.1. ábra „ $Re < Re_{KR}$ ”-val jelölt görbéje.

Nagyobb, pontosabban a kritikusnál nagyobb Reynolds szám esetén a lamináris után a turbulens határreteg is létrejön. A turbulens határretegben jelentősen nagyobb energiátranzport jóval későbbi ($\vartheta \cong 120^\circ$) leválást jelent. Emiatt, ebben az esetben a nyomáslefutást jellemző görbe ($Re > Re_{KR}$) sokkal közelebb halad az ideálshoz. Ez azt jelenti, hogy a henger (gömb) ellenállása a kritikus Reynolds szám elérésekor hirtelen lecsökken.

Ezt a tényt, hogy ti. a tompa testeknél, turbulens határreteg esetén az áramlás később válik le, ezért az ellenállás kisebb lesz, kihasználjuk. Tipikus példa a golflabda esete: ennek a felszínét úgy alakítják ki, hogy a határreteg a lehető legkorábban turbulens legyen – ezért az ilyen labda azonos impulzus hatására messzebbre repül (egyes esetekben akár 75%-kal messzebbre), mint egy olyan, amelynek a sima felületén nem alakul ki turbulens határreteg.

A testek körüli áramlások vizsgálatokor sok, érdekes kérdés merül fel. Az egyik ezek közül a nyomás és a csúsztató feszültség eloszlása a test felületén. Az (1.2) kifejezést a szóban forgó test felülete mentén integrálva a testre ható eredő erőt kapjuk:

$$\mathbf{R} = \int_A \mathbf{\Pi} d\mathbf{A}; \quad (18.1)$$

Ennek az erőnek általában két, egymásra merőleges összetevőjét szokás vizsgálni: az egyik a zavartalan áramlás irányába eső ellenállás-erő, a másik az arra merőleges felhajtóerő. Az ellenállás erőt az ellenállás tényező (c_e) segítségével szokás felírni.

Az ellenállás tényezőt pl. (szélcsatorna) mérés alapján lehet meghatározni; megmérjük a vizsgált testen keletkező ellenállás erőt, majd ezt az erőt elosztjuk a zavartalan áramlás sebességével számított dinamikai nyomás és a test áramlásra merőleges, legnagyobb keresztmetszeti felületének (A_M) szorzatával:

$$c_e = \frac{F_E}{\frac{\rho}{2} c^2 A_M}; \quad \text{itt: } c_e - \text{az ellenállás tényező} \quad (18.2)$$

A 18.2. ábrán a henger és a gömb ellenállás tényezője látható, a Reynolds szám függvényében. A görbék csak jellegre helyesek, azokról számértéket számolás céljából használni nem szabad. Mindkét görbén látható egy-egy, kritikusnak nevezett Reynolds szám, amelynél az ellenállás tényező értéke hirtelen lecsökken. Ez a már korábban említett, határreteg váltás miatti körülfogási szög növekedés következménye.

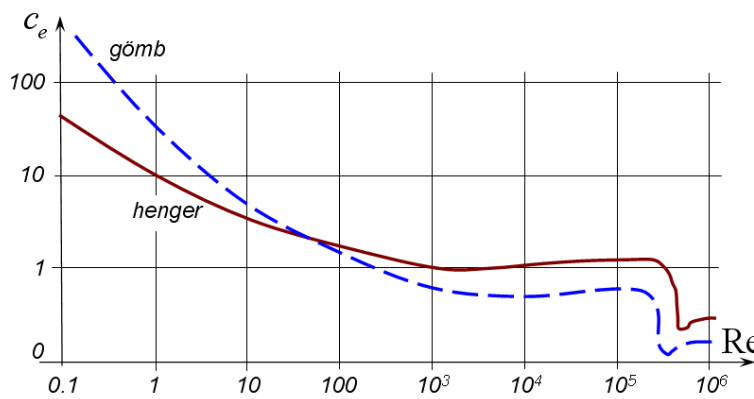
A gömb esetében, teljesen turbulencia-mentes áramlásban ennek a kritikus Reynolds számnak az értéke: $3.85 \cdot 10^5$. Ennek a kritikus Reynolds számnak a segítségével szokás a **turbulencia faktort** definiálni:

$$tf = \frac{3.85 \cdot 10^5}{Re_{krMÉRT}}; \quad (18.3)$$

A fenti kifejezés nevezőjében az a kritikus Reynolds szám található, amelyet a minősíteni kívánt áramlásban mérhetünk. Ez legfeljebb egyenlő, de általában kisebb, mint a turbulencia-

mentes áramlásban adott érték – ami a tört számlálójában található. A mért kritikus Reynolds szám annál kisebb, minél turbulensebb a vizsgált áramlás. Így, a turbulensséggel növekedésével a turbulencia faktor értéke is növekszik.

18.2. ábra



Az ábrán látható görbék összenyomhatatlan közegre vonatkoznak.

Nagy sebesség (nagy Mach szám) esetén megjelenik a hullám ellenállás, ami a görbék menetét jelentősen megváltoztatja.

Áramvonalas testek – a szárnyprofil

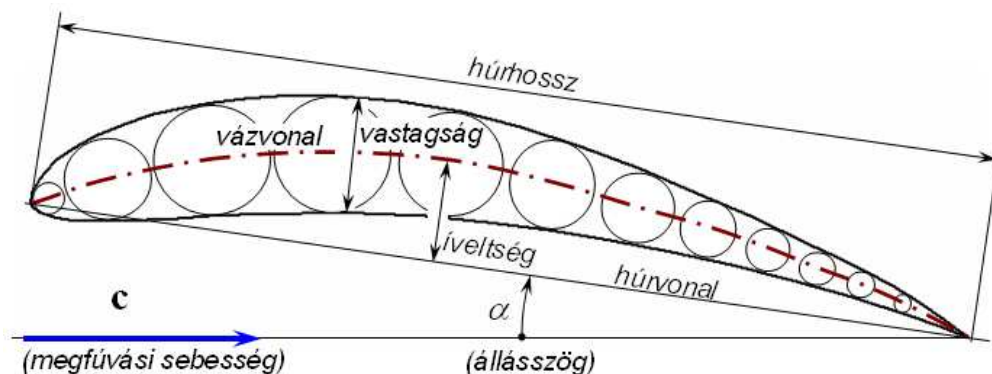
A tompa testek ellentéte az áramvonalas test. A tompa testek körüli áramlásban jellemzően légellenállás jön létre, mely mérsékelt sebességű áramlásban döntően az alakellenállás. Nagysebességű áramlásban megjelenik a hullámellenállás is. Ezek az ellenállások alapvetően a nyomáskülönbség miatt állnak elő, a csúsztató feszültség szerepe kicsi.

Az áramvonalas testek esetében az alakellenállás általában kicsi, e testek ellenállásának döntő része – mérsékelt sebességű áramlásban – a súrlódási ellenállás. Éppen ezért az ebben az esetben az ellenállás tényezőt az áramlás által súrolt felülettel arányos, ún. vetületi felülettel (A_s) szokás számolni:

$$c_e = \frac{F_E}{\frac{\rho}{2} c^2 A_s}; \quad \text{itt: } c_e - \text{az ellenállás tényező} \quad (18.4)$$

Az áramvonalas testek a járműgépészetben legjellemzőbb példája a mérsékelt sebességű áramlásokban alkalmazott szárnyprofil. A szárnyprofil jellemzői a 18.3. ábrán láthatók. A szárny-profilt rendkívül sokfelé alkalmazzák – a legfontosabb sajátossága az, hogy az áramlás irányába eső ellenálláshoz képest (igen) nagy, az áramlásra merőleges felhajtó erőt hoz létre.

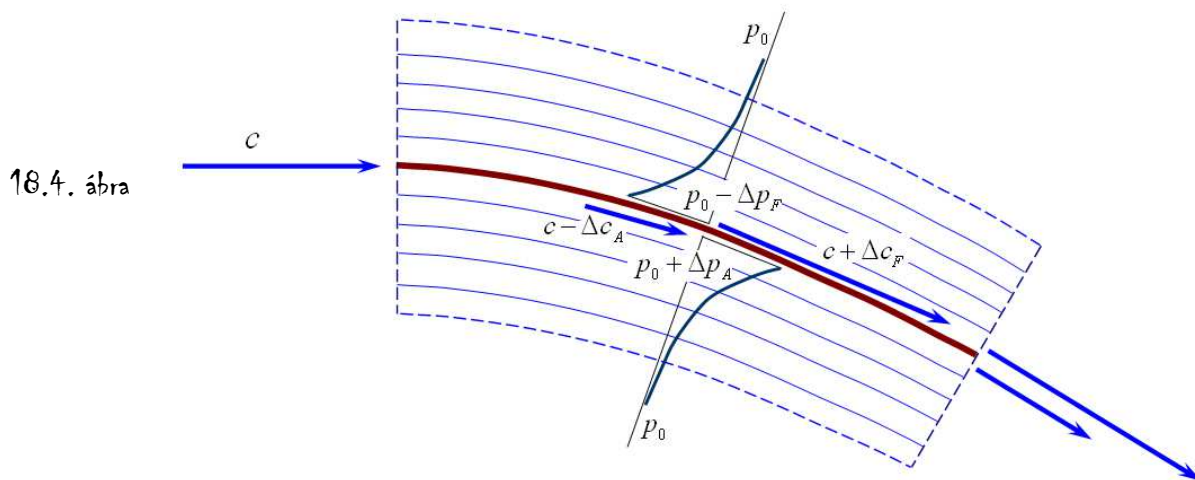
18.3. ábra



A felhajtóerő tényezőt az ellenálláshoz hasonló módon definiáljuk:

$$c_f = \frac{F_F}{\frac{\rho}{2} c^2 A_S}; \text{ itt: } c_f - a \text{ felhajtóerő tényező} \quad (18.5)$$

Helyettesítsük a szárnyprofil a vázvonallával (18.4. ábra). Azt mondhatjuk, hogy a szárnyprofil elsősorban a körülötte áramló levegő sebességének irányát változtatja meg. Az irányváltozás, az áramvonalak görbületén keresztül nyomásváltozáshoz vezet. Így alakul ki a vázvonalt (profil) alatti nyomásnövekedés ($p_0 + \Delta p_A$), illetve a vázvonalt feletti nyomáscsökkenés ($p_0 - \Delta p_F$). Azt mondhatjuk, hogy a nyomás a vázvonatra merőlegesen majdnem mindig szigorúan monoton nő – kivéve magát a vázvonalt, ahol ugrásszerűen csökken. Ez a nyomásugrás – természetesen – csak úgy lehetséges, hogy az áramlást a vázvonalt (profil) szilárd felületként két részre osztja.

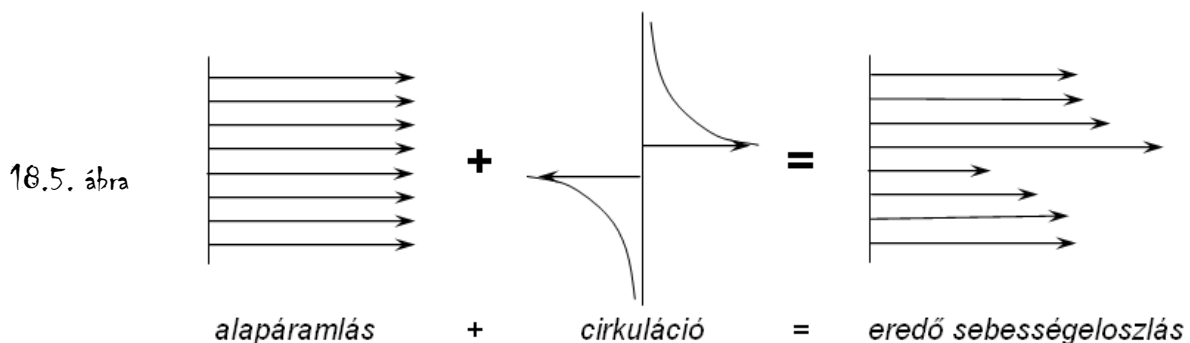


18.4. ábra

A felső nyomáscsökkenés következtében felül a helyi sebesség megnő; alul, a nyomásnövekedés miatt pedig lecsökken. E nyomáskülönbség alapján előálló sebesség-különbségnek a felhasználásával számítható a cirkuláció, ahol az integrálban használandó zárt görbe a vázvonalt (profil) körülvevő, zárt görbe:

$$\Gamma = \oint \mathbf{c} \, d\mathbf{s}; \quad (2.13)$$

Emiatt, az általában nem nulla cirkuláció – vagy örvény – miatt nevezik a szárnyprofilokból felépített lapátokkal ellátott áramlástani gépeket örvénygépeknek. A profil hatásának cirkulációval történő modellezése – igen nagyvonalúan – a 18.5. ábrán látható:



18.5. ábra

Az alapáramlás és egy (a gyakorlati számításokban több, esetleg megoszló) örvény sebességterének összege olyan eredő sebességterre vezet, ahol a profilhoz (vázvonalt) közeledve

megkapjuk a felső oldali sebességnövekedést és az alsó oldali sebességcsökkenést. Illetve a profiltól (vázvonalától) távolodva a sebesség a zavartalan áramlás sebességéhez tart, vagyis ekkor a nyomás értéke is tart a környezeti nyomás értékéhez. Az ilyen elven felépített, numerikus modelleket a szakirodalomban felületi örvény-panel módszereknek nevezik, ezeket a profilok egyszerű numerikus számítására (igen elterjedten) használják is.

A 18.4. ábrán, a kilépésnél megfigyelhető, hogy a kilépő sebesség ugyan közel érintőleges, azonban a felső oldalról érkező közeg sebessége nagyobb, mint az alsó oldalról érkező. Vagyis a profil nyomában egy ún. nyíró-réteg alakul ki. Ebben a rétegben a felső áramlás sebessége fokozatosan csökken, miközben a nyomás növekszik; az alsó áramlás sebessége pedig fokozatosan nő, miközben a nyomása csökken. Ez végeredményben azt okozza, hogy a profil mögötti áramvonal (nyom) tovább görbül lefele. Így alakul ki az a helyzet – amihez hasonlót a légcsavarnál már bemutatunk – hogy a vázvonaltól (profiltól) távolabbi indukált sebesség kb. kétszer akkora lesz, mint a közvetlenül a vázvonalnál (profilnál) adódó indukált sebesség.

A profilok legfontosabb tulajdonságaként azt jelöltük meg, hogy ezek kis ellenállás árán nagy felhajtóerőt képesek létrehozni. A (18.4), illetve (18.5) összefüggésekkel definiáltuk az ellenállás, illetve a felhajtóerő tényezőt. E két tényező viszonya számszerűen is megmutatja, hogy a profil aerodinamikai minősége milyen. Definiáljuk először a siklószámot:

$$\varepsilon = c_e / c_f ; \quad (18.6)$$

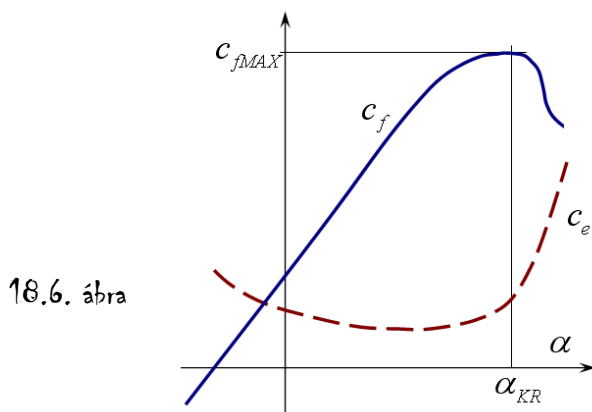
A siklószám annál jobb, minél kisebb az értéke. Csak megjegyezzük, hogy a siklószám az elnevezését onnan kapta, hogy megmutatja: egységnyi magasságból milyen távolságra siklik egy vitorlázó repülőgép. Vagyis a siklószám korrekt megnevezése mondjuk 1:25. A gyakorlatban a kifejezésből az egyes elmaradt és gyakran mondják – pontatlanul! – hogy a siklószám 25.

Más iskolákban az aerodinamikai jóságot (minőséget) definiálják:

$$K = c_f / c_e = 1 / \varepsilon ; \quad (18.7)$$

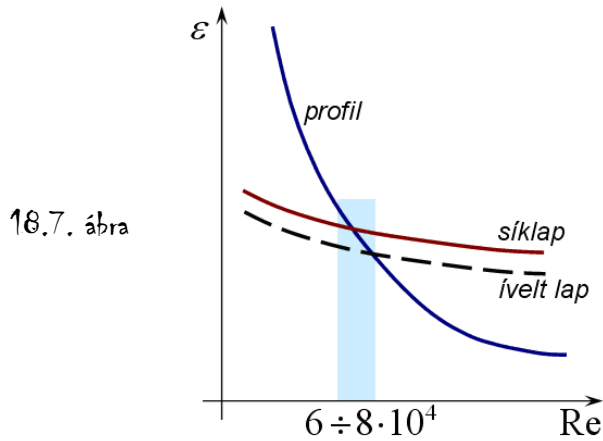
Az aerodinamikai minőség éppen a siklószám reciproka – annyi, mint a pontatlanul megnevezett siklószám (példaként mondtuk a 25-öt). A konkrét siklószám, vagy aerodinamikai minőség érték egy-egy konkrét profil valamely működési állapotában a profiljellemzők ismeretében határozható meg. Nagyon jó profiloknál az aerodinamikai minőség 100-120-as értéket is elérhet.

A profilok működését jellemző, legfontosabb változó az állásszög (18.3. ábra).



A felhajtóerő és az ellenállás tényező a 18.6 ábrán látható. A felhajtóerő tényező sokáig az állásszöggel arányosan változik, majd amikor az értéke túl nagy lesz és az áramlás már nem tudja követni a profil kontúrját (leválás kezdődik), akkor, egy maximális érték után erősen csökkenni kezd. Ezt a maximális felhajtóerő tényezőt éppen a kritikusnak nevezett állásszögnél kapjuk. Az ellenállás tényezőnek van egy minimális értéke, ettől balra és jobbra egyaránt növekszik.

A gyakorlatban rendkívül sokféle profil ismert. E sokféle profilból, például a repülésben ismertek a NACA, a CAGI, az ONERA, a RAF stb. profilok. E profilok adatai ún. profil-katalógusokban találhatóak meg. (Ilyen pl. a NACA – National Advisory Committee for Aeronautics – 824-es „Report”-ja, amely 1945-ben jelent meg és a „Summary of Airfoil Data” címet viseli).



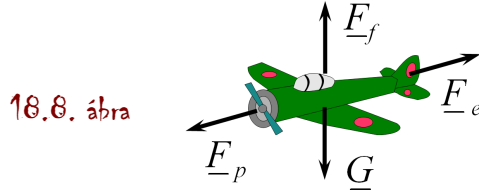
A legjobb siklószám (melynek értéke annál jobb, minél kisebb) változását a Reynolds szám függvényében, egy profil, ívelt lap és síklap esetében a 18.7. ábra mutatja. Látható, hogy van egy Reynolds szám intervallum, ami alatt célszerűbb síklapot vagy ívelt lapot alkalmazni; illetve efelett a profil alkalmazása előnyösebb.

Erre láthatunk példát, amikor a kisméretű gépek esetében (pl. processzor-hűtő ventilátor) a lapátot ívelt lapból állítják elő. Nagyobb gépeknél viszont profilokat alkalmaznak.

A szárnyprofilok működését kétdimenziós, vagyis síkáramlásban vizsgáltuk. Sok, érdekes, itt nem vizsgálható kérdés merül fel akkor, ha az áramlást három-dimenziósnak kell tekinteni – ilyen pl. a véges szárny problémája.

Mintafeladat

A [7] példatár a 16. „Súrlódásos áramlás testek körül” c. fejezetében több, e fejezet anyagához csatlakozó példa található. A következőkben egy, egyszerű feladatot mutatunk be.

Feladat:

Meghatározandó az ábrán látható motoros kisrepülő-gép felhajtóerő és légellenállás tényezője, valamint siklószáma. A repülőgép szárnyának felülete $A_s = 18 \text{ m}^2$; a repülőgép súlya $G = 14500 \text{ N}$; a repülési sebessége $c = 60 \text{ m/s}$ és a repüléshez szükséges teljesítmény $P = 75 \text{ kW}$.

A számításban a levegő sűrűsége $\rho = 1.225 \text{ kg/m}^3$ értékre választható.

Megoldás: a mechanikából ismeretes, hogy egyenes vonalú, egyenletes sebességű mozgás esetén a testre – jelen esetben repülőgépre – ható külső erők eredője és az eredő külső nyomaték egyaránt zérus. A nyomatékokkal ebben a feladatban nem foglalkozunk – csak a teljesség kedvéért említettük meg őket. Az erőegyensúlyból következik, hogy a vonóerő (\mathbf{F}_p) és a légellenállás (\mathbf{F}_e) eredője, valamint a felhajtóerő (\mathbf{F}_f) és a súlyerő (\mathbf{G}) eredője páronként nulla.

A felhajtóerő abszolút értéke tehát egyenlő a súlyerő abszolút értékével:

$$|\mathbf{F}_f| = |\mathbf{G}| \Rightarrow F_f = 14500 \text{ N}; \quad (18.8)$$

A felhajtóerő ismeretében, (18.5) felhasználásával számítható a felhajtóerő tényező is:

$$c_f = \frac{F_f}{(\rho/2)c^2 A_s} = \frac{14500}{(1.225/2) \cdot 60^2 \cdot 18} = 0.365; \quad (18.9)$$

Másrészt a repüléshez szükséges teljesítmény kifejezése alapján a vonóerő a következőképpen számítható (a vektor jellegét elhagyva, az abszolút értékkel számolunk):

$$P_{sz} = F_p \cdot c \Rightarrow F_p = P_{sz}/c = 75000/60 = 1250 \text{ N}; \quad (18.10)$$

Innen következik a légellenállás és (18.4) szerint az ellenállás tényező is:

$$F_p = F_e = 1250 \text{ N}; \quad \text{és} \quad c_e = \frac{F_e}{(\rho/2)c^2 A_s} = \frac{1250}{(1.225/2) \cdot 60^2 \cdot 18} = 0.031; \quad (18.11)$$

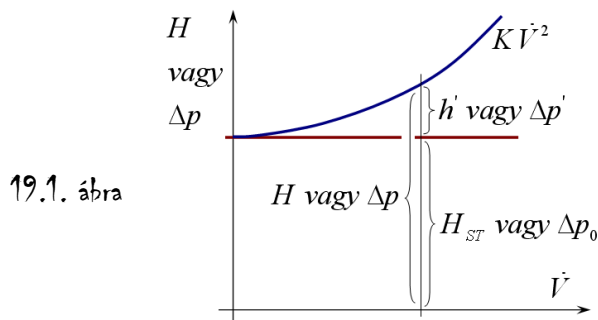
Számítsuk ki (18.6) szerint a siklószámot:

$$\varepsilon = c_e/c_f = 0.031/0.365 = 0.085 \approx 1:11.8; \quad (18.12)$$

Ebben a pontban az áramlástechnikai gépek legelemibb alapismereteit mutatjuk be. Ezek az alapismeretek a járművekkel foglalkozó mérnökök számára feltétlenül szükségesek.

A csővezetékek jelleggörbéje

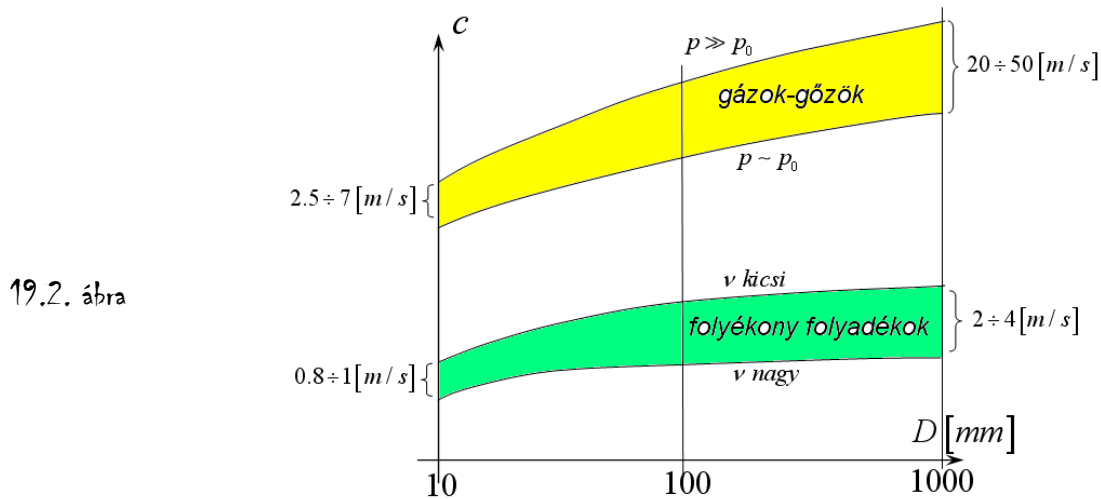
A csővezetékek egyes kérdéseivel a 17. pontban már foglalkoztunk. A csővezetékek, amelyek egyenes csövekből, csőkönyökökből, elzáró szerkezetekből és egyéb elemekből állíthatók össze különféle (folyékony és gáznemű) folyadékok szállítására szolgálnak. Egy ilyen, konkrét csővezeték jelleggörbéje látható a 19.1. ábrán:



19.1. ábra

A csővezeték szállíthat valamely magasságra (H), vagy valamely nyomáskülönbség ellenében (Δp). Ez a szállítás a statikus szállító magasságból (H_{ST}), vagy nyomáskülönbségből (Δp_0), valamint a veszteségből (h' vagy $\Delta p'$) tevődik össze. Ez utóbbi (a veszteség) a 17. pontban foglaltak szerint a térfogatáram négyzetével arányos.

Az ilyen jelleggörbével bíró csővezetékekkel kell az egyes áramlástanai gépeknek együttműködni. A gáznemű, illetve folyékony folyadékok szállítására szolgáló csővezetékekben előforduló, jellegzetes sebességeket – a csőátmérő függvényében – mutatja a 19.2. ábra:



19.2. ábra

A 19.2. ábra természetesen csak a tájékozódást szolgálja, a gyakorlati megoldásokban ettől eltérő átmérők és eltérő sebességek is léteznek. Mindazonáltal érdekes megfigyelni, hogy az elektromos távvezetékekhez hasonlóan a nagyobb távolságra történő szállítás jellemzően nagyobb nyomáson történik. (Az elektromos feszültség-különbség áramlástanai megfelelője a nyomás különbség.)

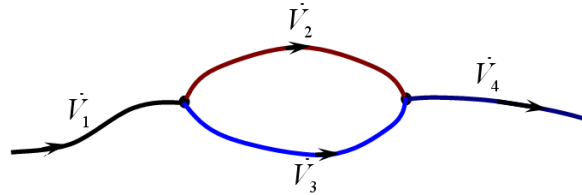
Csőhálózatok alapismeretei

A csővezetékekből gyakran csőhálózatot állítanak össze. Ezek áramlási viszonyait – ismét elektromos analógiára hivatkozva – a csomóponti és a hurok-törvény alapján írhatjuk le. E

törvények általánosan az un. illeszkedési és hurok-mátrix segítségével fogalmazhatók meg; ebben az előadás vázlatban csak nagyon egyszerűen, az elemi szemléletből következő alakjuk található meg.

Tekintsük a 19.3. ábrán látható, egyszerű hálózatot:

19.3. ábra



Erre a hálózatra nézve felírható két csomóponti-egyenlet:

$$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3 \quad \text{illetve} \quad \dot{V}_2 + \dot{V}_3 = \dot{V}_4; \quad (19.1)$$

Ezek az egyenletek – a folytonosság törvényét szem előtt tartva – azt fejezik ki, hogy egy csomópontba belépő és kilépő áramok értéke azonos.

A hurok-törvény pedig azt mondja ki, hogy a 19.3. ábra jelöléseit használva a nyomásveszteség az „2”-es szakaszon egyenlő a „3”-as szakaszon bekövetkező nyomásveszteséggel:

$$\Delta p'_2 = \Delta p'_3; \quad (19.2)$$

Általános esetben a csomóponti és hurok-törvények alapján nemlineáris egyenlet rendszert kapunk, ennek megoldása rendszerint valamely, ide vágó numerikus módszer alkalmazását igényli.

Csőhálózatra vonatkozó, igen egyszerű példa a [7] 15.13-as feladata.

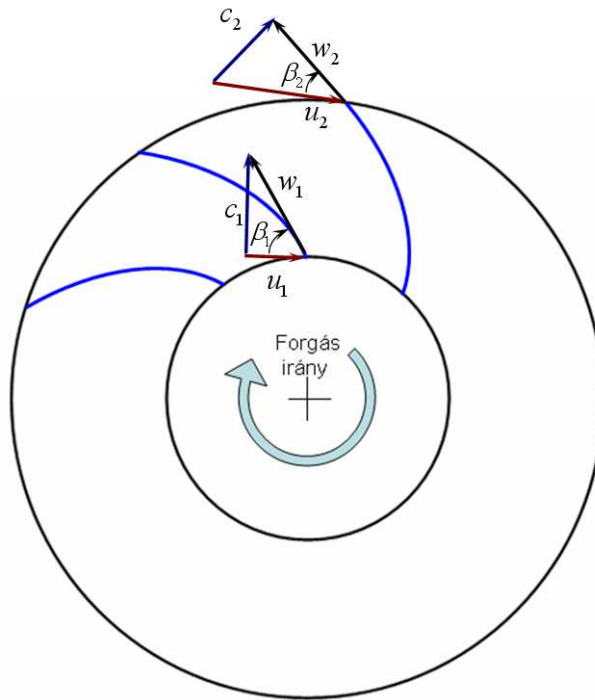
Áramlástanai gépek

Az itt következő, erősen bevezető jellegű fejezetben az áramlástechnikai gépek közül csak az örvénygépekkel foglalkozunk. Az örvénygépek elnevezésben az „örvény” nem a forgáson, hanem a gépben található (szárny)lapát körül kialakuló örvényen, másképpen cirkuláción alapul.

Az örvénygépek többnyire (nagyon nagyvonalúan) egy házból (pl. csigaház), járókerékből és a járókereket forgató motorból állnak. Mi, itt a radiális járókereket, azok lapátkialakítását és működését tárgyaljuk. Ezt is a legegyszerűbb módon, a lapátokat vázvonallal helyettesítve tesszük.

A „radiális” azt jelenti, hogy a közeg a járókeréken alapvetően sugárirányban (és nem tengelyirányban – ezek egyébként az axiális gépek és léteznek a két áramlási irány kombinációja is) halad át. A lapátozást illetően használjuk a „hátrahajló”, a „radiális” és az „előrehajló” jelzőt. Ez alapvetően a lapát kilépő érintője irányát jelzi. A „radiális lapát” azt jelenti, hogy a kilépő érintő sugárirányú. A „hátrahajló lapát” kilépő érintője ezek szerint a forgásirány szerint hátra dől, az „előrehajló lapát” kilépő érintője pedig előre.

19.4. ábra

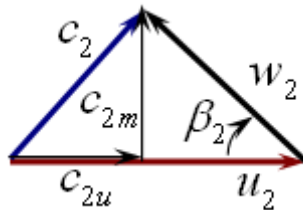


A 19.4. ábrán egy hátrahajló lapátózású, radiális átömlésű járókerék látható. A belépést „1”-es, a kilépést „2”-es index jelöli.

A belépésnél feltettük, hogy a belépő közegnek nincs perdülete (cirkulációja), mert a Kelvin tétel értelmében (10.5), ideális, összenyomhatatlan közegben a perdület idő szerinti deriváltja nulla. Ez akkor nincs így, ha a járókerékhez áramló közegnek valami perdületet ad: ilyen lehet, mondjuk a járókerék előtti előperdítés.

A 19.4. ábrán egy be- és egy kilépő sebességi háromszög látható. E két sebességi háromszögben az abszolút sebesség (c) – a mechanika tanítása szerint – a szállító sebesség (u) és a relatív sebesség vektori (w) összegeként áll elő.

19.5. ábra



A 19.5. ábrán egy, kilépő sebességi háromszög látható. Ebbe a háromszögbe berajzoltuk az abszolút sebesség kerületi (c_{2u}) és meridián (c_{2m}) összetevőjét, valamint a lapátszöveget (β_2) is.

Az abszolút sebesség kerületi összetevőjét a perdület, a meridián összetevőjét a térfogatáram számításakor használjuk majd fel.

A perdület (impulzusnyomatéki) tétel segítségével határozzuk meg egy járókerék forgatásához szükséges nyomatékot:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA}) = \int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{\Pi} \mathbf{dA}) + \int_V \mathbf{r} \times (\rho \mathbf{g} dV) - \mathbf{r} \times \mathbf{T}; \quad (7.18)$$

Tegyük fel, hogy a jobb oldal első és második tagja nulla, azaz a felületi erők nyomatéka és a térerősségből származó erők (pl. súlyerő) nyomatéka is nulla. Tegyük fel továbbá, hogy a 19.4. ábrán látható, kétdimenziós esetenél a forgatáshoz szükséges nyomaték az ábra síkjára merőleges (vektor) és a baloldalon lévő vektori szorzat ábra síkjára merőleges összetevője [1] nyomán:

$$\int_{(A)} \mathbf{r} \times (\mathbf{c} \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA}) = (r_2 c_{2u} - r_1 c_{1u}) \dot{m}; \quad (19.3)$$

Másrészt, szintén a baloldali integrálban megtalálható a tömegáram:

$$\int_A \rho \mathbf{c}^T \mathbf{dA} = \dot{m}; \quad (19.4)$$

Ezzel a perdület tétel alapján a járókerékre ható nyomaték számítható:

$$\dot{m}(c_{2u}r_2 - c_{1u}r_1) = (-\mathbf{r} \times \mathbf{T})\Big|_z = -M_{JK} ; \quad (19.5)$$

Szorozzuk be mindkét oldalt a szögsebességgel és vegyük a jobb oldal „-1”-szeresét, hogy a folyadékknak átadott teljesítményt (P_{FF}) kapjunk:

$$\dot{m}(c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1) = -M_{JK}\omega = P_{FF} ; \quad (19.6)$$

A folyadékknak átadott teljesítményt a Bernoulli egyenlet alapján is felírhatjuk, hiszen a tömegáram és az energia-különbség éppen ezt adja:

$$P_{FF} = \dot{m} \left[\frac{c^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} \right]_1^2 = \dot{m} g (H_2 - H_1) = \dot{m} g H_{\infty} ; \quad (19.7)$$

$$\left(\text{itt : } gH_i = \frac{c_i^2}{2} + gh_i + \frac{p_i}{\rho}, \quad i = 1 \text{ vagy } 2 \right).$$

A fenti egyenletben, a hagyományos felírási módnak megfelelően minden energiát magasság dimenzióban fejeztünk ki, ezért írható a jobb oldalon egyszerűen a magasság különbség. Ez a magasság különbség röviden az „elméleti végtelen szállító magasság”, ami a (19.7) jobb oldalán látható „ H ” betű indexe.

(19.6) és (19.7) összevetésével az Euler turbina egyenletet kapjuk:

$$H_{\infty} = \frac{c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1}{g} ; \quad (19.8)$$

Az „Euler turbina egyenletet” egy, a hagyományokon alapuló elnevezés, erő és munkagépekre egyaránt alkalmazható. Az „elméleti” azt jelenti, hogy ebben az egyenletben veszteségeket nem veszünk figyelembe. A végtelen pedig azt jelenti, hogy a lapátok száma végtelen, azaz a perdület a kerület mentén mindenütt az állandó, elméleti érték.

Ez az egyenlet, hasonló formában axiális ventilátorokra is felírható:

$$\Delta p_{oid} = \rho u \Delta c_u \quad (19.9)$$

A (19.9) annyiban különbözik a (19.8)-tól, hogy a magasság helyett nyomás-dimenzióban íródott; továbbá az axiális gépeknél a ki- és belépő sugár lényegében azonos, így nincs értelme kétféle kerületi sebességgel számolni ($u_1 = u_2 = u$), illetve az abszolút sebességek kerületi irányú összetevőinek különbsége egyetlen tagba foglalható össze ($c_{2u} - c_{1u} = \Delta c_u$).

Az örvénygépek működésére jellemző a reakciófok. Írjuk fel a teljes szállító magasságot a nyomásból és a mozgási energiaváltozásból származó szállító magasságok összegeként:

$$H = H_p + H_c ;$$

Ezzel a reakciófok:

$$r = \frac{H_p}{H} = \frac{H - H_c}{H} = 1 - \frac{H_c}{H} ; \quad \text{itt : } H_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} ; \quad (19.10)$$

A 19.4. és 19.5. ábrán feltüntetett sebességekkel kapcsolatban két, egyszerűsítő megállapítást szokás megfogalmazni. Az első, ahogyan az a 19.4. ábrán látható is, az, hogy a belépő közegnek nincs perdülete ($c_{1u} = 0$). A második szerint feltesszük, hogy a járókereket úgy alakítják ki, hogy a meridián sebesség ne változzon ($c_{1m} = c_{2m}$). Ez utóbbi sebesség állandósága úgy érhető el, hogy a járókeréken a folyadék átáramlási keresztmetszetét állandónak tartjuk – vagyis a növekvő sugarak esetében növekvő kerülethez megfelelő mértékben kisebb magasságot rendelünk. (Vagyis a járókerék lapát-magassága a sugár növekedésével csökken.) Ezen egyszerűsítésekkel a „ H_c ” szállítómagasság rész az alábbi formában írható fel:

$$H_c = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2g} = \frac{c_{2u}^2 + c_{2m}^2 - c_{1u}^2 - c_{1m}^2}{2g} \cong \frac{c_{2u}^2}{2g}; \quad (19.11)$$

Ezzel a reakciófok:

$$r = 1 - \frac{c_{2u}^2}{2c_{2u}u_2}; \quad \text{mert: } H = H_{\infty} \cong \frac{c_{2u}u_2}{g}; \quad (19.12)$$

A radiális járókerekek vizsgálatában az alábbi áttételi számot szokás bevezetni:

$$\xi = c_{2u}/u_2; \quad (19.13)$$

E viszonyszám a lapátozás alakját is jellemzi: hátrahajló a lapát ha $\xi < 1$ (ez a helyzet a 19.4. ábrán); radiális kilépésű a lapát, ha $\xi = 1$ ($c_{2u} = u_2$), ilyenkor a relatív sebesség merőleges a kerületi (szállító) sebességre; előreahajló a lapát, ha $\xi > 1$. Előreahajló lapát esetén a kilépő abszolút sebesség nagy értéket vesz fel, ilyenkor a kilépésnél nagy a kinetikai energia.

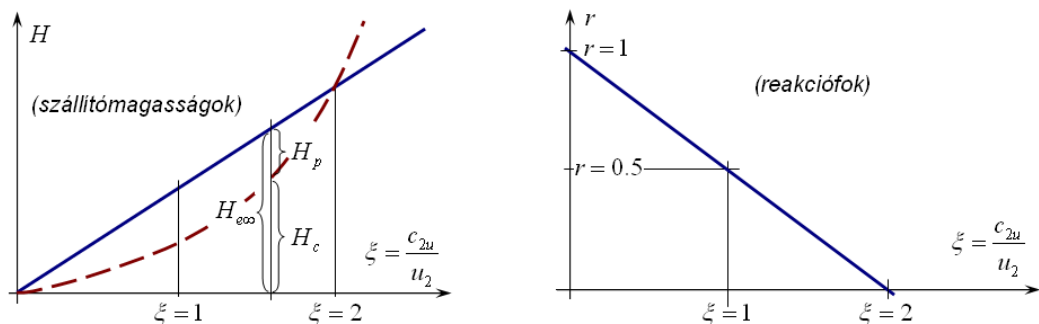
A ξ segítségével a szállítómagasságok és a reakció-fok a következő formában írható fel:

$$H_{\infty} = \xi \frac{u_2^2}{g}; \quad H_c = \xi^2 \frac{u_2^2}{2g} \quad \text{és ezzel: } r = 1 - \frac{\xi}{2}; \quad (19.14)$$

Ábrázoljuk a szállítómagasságokat, illetve a reakciófokot a sebességi szám függvényében (19.6. ábra). A bal oldali rész-ábráról leolvasható, hogy az elméleti végtelen szállító magasság a sebességi számmal arányosan nő.

Ezen belül a kinetikai energia növekedéséből számított szállító magasság rész négyzetesen növekszik. Az ábráról leolvasható, hogy a hátrahajló lapátok ($\xi < 1$) esetében a nyomás magasság a nagyobb, mint a ($H_p > H_c$) a kinetikai energia növekedéséből számított szállító magasság rész. Ekkor a reakció fok értéke: $1 \geq r > 0.5$.

19.6. ábra



A radiális (kilépésű) lapátoknál ($\xi = 1$) a két szállítomagasság rész egyenlő ($H_p = H_c$), a reakció fok pedig éppen 0.5 – ez jól látható a jobboldali rész-ábrán. Az előrehajló lapátok esetében ($\xi > 1$) a kinetikai energia növekedéséből számított szállító magasság rész kerül túlsúlyba, és ennek megfelelően a reakció fok csökken ($0.5 > r \geq 0$).

Mindkét rész-ábra világosan mutatja, hogy a $\xi = 2$ -es érték fölé menni igazán célszerűtlen. Végkövetkeztetésként megállapíthatjuk, hogy a hátrahajló lapátózás viszonylag kis szállítomagasságot képes előállítani, de ezt viszonylag jó hatásfokkal teszi – vagyis az ilyen gép méretei (adott feladatra) nagyok lesznek: ezek a stabil, nagyméretű, jó hatásfokú berendezések. Az előrehajló lapátózás esetében viszont éppen viszonylag nagy szállítomagasságot kapunk, de viszonylag rossz hatásfokkal. Az ilyen lapátózással ellátott gépek lehetnek azok a mobil gépek, ahol első sorban a nagy teljesítmény és kis méret a fontos, a hatásfok nem annyira lényeges. Erre példaként a tűzoltó szivattyút említjük.

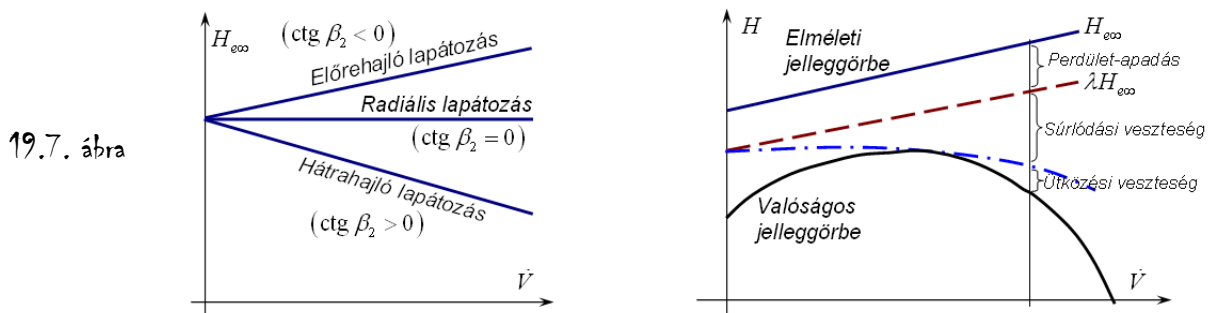
Radiális átömlésű járókerékkel ellátott örvénygépek jelleggörbéje

Az eddig tárgyalt gépek esetében, a gépek működtetéséhez szükséges ezek jelleggörbéinek ismerete. Jelleggörbének egy, adott fordulatszámhoz tartozó szállítomagasságtérfogatáram diagrammot nevezünk. Vizsgáljuk meg először az elméleti jelleggörbéket.

Legyen a ki- és belépő meridián sebesség azonos, illetve legyen a belépés perdületmentes. Ekkor (19.8) megfelelően egyszerűsített alakjából, illetve a 19.5. ábra alapján írhatjuk, hogy:

$$H_{\infty} = \frac{c_{2u} u_2}{g} = \frac{(u_2 - c_{2m} \operatorname{ctg} \beta_2) u_2}{g} = \frac{u_2^2}{g} - \frac{u_2}{g} c_{2m} \operatorname{ctg} \beta_2 = K_1 - K_2 \dot{V}; \quad (19.15)$$

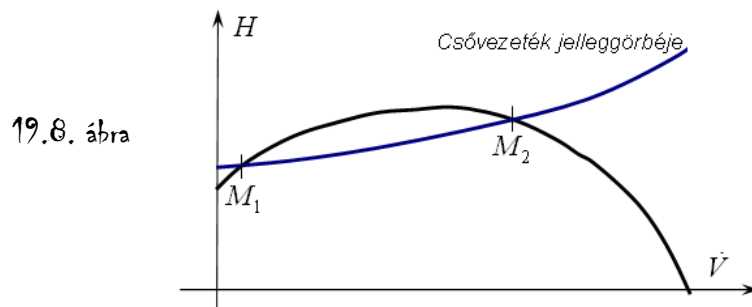
A fenti kifejezés felírásánál kihasználtuk, hogy a kilépő meridián sebesség összetevő arányos a térfogat árammal. A kilépő lapátszöget tartalmazó tag ($\operatorname{ctg} \beta_2$) értéke hátrahajló lapát esetén pozitív, radiális lapátnál nulla és előrehajló lapát esetében negatív. Így az elméleti jelleggörbék felrajzolhatók (19.7. ábra, baloldal).



A 19.7 ábra jobb oldalán egy példa látható: hogyan származtatható egy éppen előrehajló lapátózású gép elméleti jelleggörbéjéből a valóságos jelleggörbe. Az elméleti szállító magasságból le kell vonni a véges lapátszám miatti perdület-apadási veszteséget. Ezt követően levonandó a térfogatáram négyzetével arányos sűrűdési veszteség is. Végül levonandó az ütközési veszteség: ennek értéke a tervezési pontban nulla; ennél kisebb vagy nagyobb térfogatáramoknál pedig, a munkaponttól távolodva az értéke nő.

Csővezeték és radiális átömlésű lapátozással ellátott örvénygép együttműködése

Az örvénygépek működési vizsgálatának lezárásaként vizsgáljuk egy csővezeték – radiális átömlésű örvénygép együttműködési kérdését.



A 19.8. ábrán egy radiális átömlésű lapátozással ellátott örvénygép és egy csővezeték együttműködését meghatározó jelleggörbék láthatók. A két görbének két metszés-pontja (munkapontja) van. A bal oldali labilis, a jobb oldali stabil.

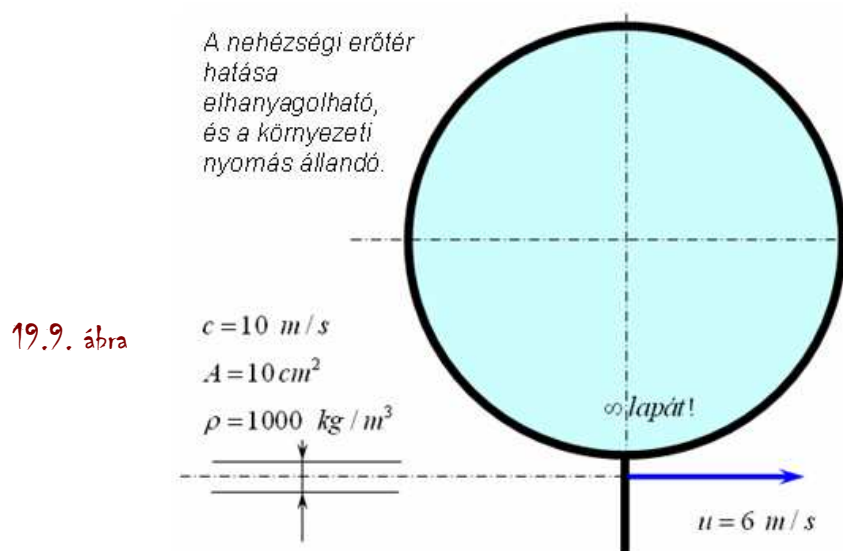
Ha a térfogat-áram valamely zavar következtében megváltozik és az „ M_1 ” munkapontnak megfelelő értéknél nagyobb értéket vesz fel, akkor a rendelkezésre álló szállító magasság nagyobb lesz a szükségesnél, tehát a térfogat-áram tovább növekszik. Ez a jobbik eset. Amennyiben a térfogat-áram lecsökkenne, akkor a rendelkezésre álló szállító magasság kevesebb lesz, mint a szükséges – így a folyadékcszállítás lecsökken. Ekkor, rossz esetben hidraulikus lengések is felléphetnek. Ez a munkapont a gyakorlatban elkerülendő!

Az „ M_2 ” munkapont viszont stabil: növekvő térfogat-áram esetén a szükséges szállító magasság nagyobb lesz, mint a rendelkezésre álló, vagyis a térfogat-áram visszacsökken a kiinduló értékre. Ha valamely zavarás folytán a térfogat-áram a munkapontbeli érték alá csökkenne, akkor a szükséges szállító magasság kisebb lesz, mint a rendelkezésre álló – ezért a térfogat-áram visszanövekszik a munkapontbeli értékre. Ez az alkalmazandó munkapont.

Mintafeladatok

A [7] példatár 22. „Áramlás- és hőtechnikai gépek” c. fejezetében több, e fejezet anyagához csatlakozó, bár az e tantárgyban megkívánt szinthez képest (túl)magas szintű példa található. A következőkben viszont több, e tárgy szintjéhez illeszkedő feladatot is bemutatunk.

Feladat:

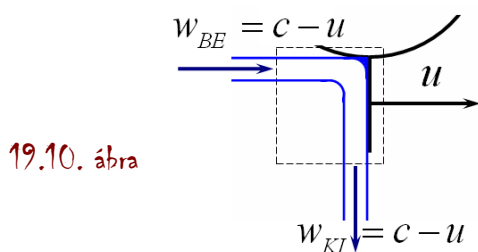


A 19.9. ábrán egy, „végtelen sok”, radiális (sugárirányú) lapáttal ellátott vízkerék látható. A kerékhez érkező víz-sugár adatai az ábrán láthatóak.

Meghatározandó a vízikerékre ható erő (vektor), a vízikerék elméleti teljesítménye és az a hatásfok, amely megmutatja, hogy ez az elméleti teljesítmény hogyan viszonyul a víz időegység alatt leadott mozgási energiájához.

Megoldás: erre a feladatra szabad az impulzus tétel (7.7) szerinti alakját alkalmazni, mivel, a végtelen sok lapát miatt ez a feladat kvázi-stacionáriusnak tekinthető. A végtelen sok lapát azt jelenti, hogy a lapátoknak van ugyan kerületi sebességük (amellyel mozognak), mégis mindig új és új lapát lép az ábrán vázolt helyre – így a lapátoknak ez a „képe” nem mozdul el!

A megoldáshoz tehát egy álló (mozdulatlan) ellenőrző felületet választunk majd – ezelőtt azonban tisztázni kell a sebességi viszonyokat. Ehhez egy, a mozgó lapáthoz rögzített ellenőrző felületet választunk:



19.10. ábra

A 19.10. ábrán látható, együtt mozgó ellenőrző felület olyan rendszert jelent, amiben erőhatás van, de elmozdulás nincs – ezért munkavégzés sem történik. Akkor viszont, mivel a nyomás állandónak tekinthető és helyzeti energiaváltozással sem kell számolni, a Bernoulli egyenlet (az energia megmaradás elve) szerint a **ki és belépő relatív sebességek abszolút értéke azonos!**

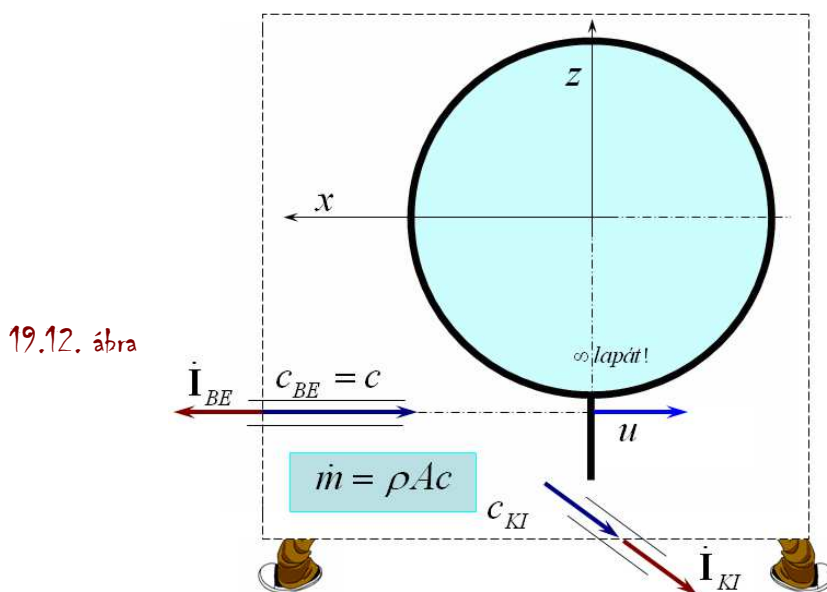
Ez egy egyszerű, de kihagyhatatlan lépés, illetve jó példa arra is, hogy mire használhatók az un. „relatív” rendszerek. Erő- és munkagépek vizsgálatánál egyaránt szokás a Bernoulli egyenletet a relatív rendszerben felírni és egyes eredményeket innen származtatni.



19.11. ábra

A 19.11. ábrán az a mechanikából ismert tény látható, amely szerint a (kilépő) abszolút sebesség (c_{KI}) egyenlő a relatív (w_{KI}) és a szállító (u) sebesség összegével.

Ezzel már felrajzolhatjuk a feladat megoldásához szükséges, **álló ellenőrző felületet:**



19.12. ábra

Az ábrán, az ellenőrző felület mellett definiáltuk a megoldáshoz feltétlenül szükséges koordináta rendszert ($x-z$ tengelyek megadásával).

Meghatározhatjuk a tömegáramot (\dot{m}), ami a folytonosság törvénye szerint állandó.

Külön felhívjuk a figyelmet a kilépő abszolút sebesség és a kilépő, időegységre eső mozgásmennyiség-változás irányára!

Most már felírható az impulzus tétel erre a feladatra érvényes alakja (hiszen a nyomáseloszlásból származó eredő erő és a térerők hatása, a feladat feltételei szerint nulla):

$$\dot{\mathbf{I}}_{BE} + \dot{\mathbf{I}}_{KI} = -\mathbf{T}; \quad (19.16)$$

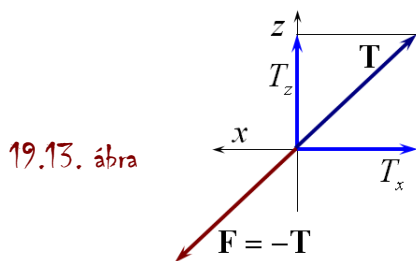
Írjuk ki részletesen (19.16)-ot:

$$\begin{bmatrix} \dot{m} c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\dot{m} u \\ 0 \\ -\dot{m}(c-u) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -T_x \\ -T_y \\ -T_z \end{bmatrix}; \quad (19.17)$$

Ezzel az egyes erő-összetevők számíthatók:

$$\begin{aligned} T_x &= -\dot{m}(c-u) = -1000 \cdot 10 \cdot 0.001 \cdot 4 = -40 \text{ N}; \\ T_y &\equiv 0; \\ T_z &= \dot{m}(c-u) = 1000 \cdot 10 \cdot 0.001 \cdot 4 = 40 \text{ N}; \end{aligned} \quad (19.18)$$

A lapátkerekre ható erő összetevőket külön is és eredő erőként (\mathbf{T}) is, a 19.13. ábrán tüntettük fel. Ezen az ábrán látható továbbá a vízre ható eredő erő is (\mathbf{F}). A számításból látszik, hogy a T_x erő-összetevő negatív, ezért az „x”-szel ellentétes az iránya. A T_z erő-összetevő viszont pozitív, tehát a „z”-vel azonos irányba mutat. A fizikai elvárások szerint éppen ilyen erőnek kell adódnia.



Érdekes megfigyelni, hogy a két erő-összetevő abszolút értéke azonos. Ez általában nincs így: egy nem radiális kilépésű lapát esetében a kilépő sebességi háromszög nem derékszögű háromszög lesz.

Ebben a mintafeladatban a 19.9. ábra szerinti elrendezést csak az egyszerűség kedvéért választottuk.

Következő lépésként meghatározandó a vízikerek elméleti teljesítménye:

$$P_{elm} = T_x u = 40 \cdot 6 = 240 \text{ watt}. \quad (19.19)$$

A harmadik kérdés a vízikerek hatásfokára vonatkozik:

$$\eta = \frac{T_x u}{\dot{m} \left[\frac{c_{BE}^2}{2} - \frac{c_{KI}^2}{2} \right]} = \frac{T_x u}{\dot{m} \left[\frac{c^2}{2} - \frac{(c-u)^2 + u^2}{2} \right]} = \frac{240}{10(50-26)} = 1.00 \quad (100\%). \quad (19.20)$$

A fenti vízikerek olyan gép, amelynek a működése során a légsavaroknál, illetve hajócsavaroknál értelmezett propulziós hatásfok nincs – vagyis az energiaátalakítás alap hatásfoka 100%. Ezért a hajók hajtására régebben alkalmazott lapátkerek alapvetően jobb hatásfokkal működtek, mint a napjainkban alkalmazott hajócsavarok.

Feladat: vízszállítási feladatra kell járókereket tervezni; az elméleti végtelen szállítómagasság $H_{e\infty} = 25 \text{ m}$, a szállított térfogatáram $\dot{V} = 600 \text{ lit/perc}$, a fordulatszám $n = 1440 \text{ f/p}$, a belépő átmérő $D_1 = 0.15 \text{ m}$ kell legyen. Feltesszük, hogy a belépés perdületmentes, a meridiánsebesség állandó ($c_{1m} = \text{áll.} = c_{2m} = 3.5 \text{ m/s}$) és a lapátok a kilépésnél sugar-irányúak.

Meghatározandó a D_2 , a járókerék külső átmérője, a b_1 és b_2 lapátmagasság, a reakciófok valamint a járókerék forgatásához elméletileg szükséges teljesítmény.

Megoldás: a vizsgálandó járókerék a 19.14. ábrán látható. Határozzuk meg először a külső átmérőnél a kerületi sebességet. Induljunk ki az elméleti végtelen szállítómagasság 19.8 szerinti kifejezéséből:

$$H_{e\infty} = \frac{c_{2u}u_2 - c_{1u}u_1}{g} \quad \text{itt:} \quad H_{e\infty} = \frac{u_2^2}{g} \quad \text{mert:} \quad c_{1u} = 0 \quad \text{és} \quad c_{2u} = u_2; \quad (19.21)$$

Ezzel a külső kerületi sebesség számítható:

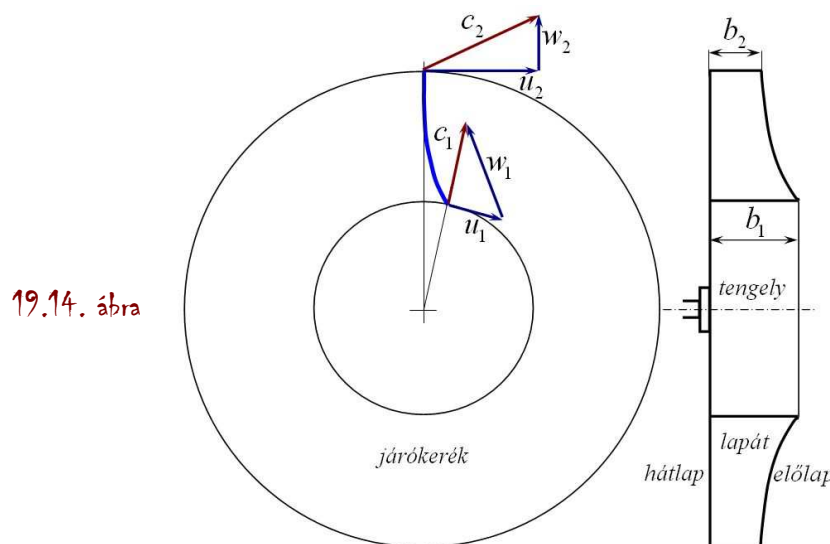
$$u_2 = \sqrt{g H_{e\infty}} = \sqrt{9.81 \cdot 25} = 15.66 \text{ m/s}. \quad (19.22)$$

A fordulatszám és a kerületi sebesség ismeretében meghatározható a külső átmérő:

$$D_2 = 2u_2 / \omega = 2 \cdot 9.55 \cdot u_2 / n = 2 \cdot 9.55 \cdot 15.66 / 1440 = 0.208 \text{ m}. \quad (19.23)$$

A térfogatáram, és a meridián sebesség ismeretében kiszámítjuk a külső palást-felületet:

$$A_2 = \dot{V} / c_{2m} = (600 \cdot 10^{-3} / 60) / 3.5 = 0.00286 \text{ m}^2. \quad (19.24)$$



A 19.14. ábrán a feladatban szereplő járókerék két nézetének vázlatos rajza látható. Megfigyelhető, hogy a belépő abszolút sebesség (c_1) sugarirányú, ez jelenti a perdületmentes belépést.

A lapátozás pedig úgy van kialakítva, hogy a belépő érintő azonos legyen a belépő relatív sebesség (w_1) irányával (ütközésmentes be-lépés a tervezési állapotban).

A lapátmagasság a külső átmérőn:

$$b_2 = A_2 / (\pi D_2) = 0.00286 / 0.653 = 0.0044 \text{ m} = 4.4 \text{ mm}. \quad (19.25)$$

A belépő lapátmagasságot a folytonosság törvénye szerint számíthatjuk:

$$b_2 A_2 = b_1 A_1 \Rightarrow b_2 D_2 = b_1 D_1 \Rightarrow b_1 = b_2 D_2 / D_1 = 0.0044 \cdot 0.208 / 0.15 = 0.0061 \text{ m} . \quad (19.26)$$

A reakciófok (19.14) szerint egyszerűen számítható:

$$r = 1 - \frac{\xi}{2}; \quad \xi = \frac{c_{2u}}{u_2} = 1; \quad \text{ezért: } r = 0.5; \quad (19.27)$$

Végül a járókerék forgatásához elméletileg szükséges teljesítményt határozzuk meg. Ez az a teljesítmény, amire a különböző veszteségek ráakódnak – vagyis a valóságban ennél a teljesítménynél akár jelentősen is nagyobb a járókerék működtetéséhez ténylegesen szükséges teljesítmény.

Írjuk fel (19.7) erre az esetre alkalmazott alakját:

$$P_{FF} = \dot{m} g H_{e\infty} = \rho \dot{V} g H_{e\infty} = 1000 \cdot 0.01 \cdot 9.81 \cdot 25 \cong 2453 \text{ watt} \cong 2.5 \text{ kW} . \quad (19.28)$$



Irodalomjegyzék

- [1] Grúber, J. – Blahó, M.: Folyadékok mechanikája, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1971* (7. kiadás)
- [2] Németh, E.: Hidromechanika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1963*
- [3] Locjanszkij, L. G.: Folyadékok és gázok mechanikája, *Akadémiai Kiadó, Budapest, 1956*
- [4] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I, (J7-724) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [5] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan I/2, (J7-724/a) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [6] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan II, (J7-725) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1976*
- [7] Konecsny, F. – Pásztor, E.: (szerk.) Műszaki hő- és áramlástan példatár, (J7-1014) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1981*
- [8] Lajos, T.: Az áramlástan alapjai, *Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2004*
- [9] Czibere, T.: Áramlástan, (J14-569) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1971*
- [10] Litvai, E. – Bencze, F.: Folyadékok mechanikája II., (J4-906) *Tankönyvkiadó, Budapest, 1975*
- [11] Nagy, K.: Elméleti mechanika (VI. fejezet), *Tankönyvkiadó, Budapest, 1985*
- [12] Sasvári, G.: Hidrodinamika, *Atheneum, Budapest, 1925*
- [13] Bohl, W.: Műszaki áramlástan, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983*
- [14] Gisbert, S. – Takó, G.: Numerikus Módszerek 3. (17. fejezet), *ELTE TypoTEX, Budapest, 1997*
- [15] Grúber, J. – Szentmártony, T.: Gázdinamika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1952*
- [16] Pattantyús, Á. G.: Gyakorlati áramlástan, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1959*
- [17] Agroszkin, I.I. – Dimitrijejev, G. T. – Pikalov, F.I.: Hidraulika, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1952*
- [18] Fűzy, O.: Vízgépek, *Tankönyvkiadó, Budapest, 1966*
- [19] Grúber, J.: (szerk.) Ventilátorok, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1968* (2. kiadás)
- [20] Halász, G. - Kristóf, G. – Kullmann, L.: Áramlás csőhálózatokban, *Műegyetemi Kiadó, Budapest, 2002*

- [21] Pachné – Frey, T.: Vektor és tenzoranalízis, *Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1970* (3. kiadás)
- [22] Bronstejn, I.N. – Szemengyajev, K.A. – Musiol, G. – Mühlig, H.: Matematikai kézikönyv *TypoTEX Kiadó, Budapest, 2000*